

ДНІПРОПЕТРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФІЛІПОВА ОЛЬГА СЕРГІЇВНА



УДК 539.3

ПЛОСКІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СКЛАДЕНИХ
АНІЗОТРОПНИХ ТА П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ТІЛ
З ЗОВНІШНІМИ МІЖФАЗНИМИ ТРИЩИНАМИ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дніпропетровськ

2007

Дисертацію є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теоретичної та прикладної механіки
Дніпропетровського національного університету.

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук, професор
Лобода Володимир Васильович,
Дніпропетровський національний університет,
Міністерство освіти і науки України,
завідувач кафедри теоретичної та прикладної механіки.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Каміньский Анатолій Олексійович,
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
завідувач відділу механіки руйнування матеріалів.

доктор фізико-математичних наук, професор
Смирнов Сергій Олександрович,
Дніпропетровський національний університет
Міністерство освіти і науки України,
декан економічного факультету ДНУ,
професор кафедри комп'ютерної обробки економічної інформації.

Провідна установа

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, відділ математичних методів
механіки руйнування та контактних явищ, м. Львів.

Захист відбудеться “22” червня 2007 року о 11 год. 30 хв. на засіданні спеціалізованої вченової ради Д 08.051.10 при Дніпропетровському національному університеті за адресою: м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркаса, 35, корпус 5, ауд. 85.

З дисертацією можна ознайомитись в науковій бібліотеці ДНУ за адресою:
49050, м. Дніпропетровськ, вул. Козакова, 8.

Відгук на автoreферат просимо надсилати за адресою:
49050, м. Дніпропетровськ, вул. Наукова, 13. Дніпропетровський національний університет, вченому секретарю спеціалізованої вченової ради Д 08.051.10.

Автoreферат розісланий “___” травня 2007 року.

Вчений секретар спеціалізованої вченової ради,
професор

Дзюба А. П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Одна з основних задач механіки – це розрахунок на міцність конструкцій. Суттєвий вплив на міцність конструкцій мають структурні дефекти. В реальних матеріалах конструкцій завжди присутні мікродефекти. Останні під впливом навантаження призводять до появи тріщин та їх росту, що може привести до руйнування конструкції. Це явище в першу чергу властиве для крихких матеріалів. Тому дуже багато дослідників займалися проблемою міцності елементів конструкцій з тріщинами, практичними питаннями розрахунків конструкцій з дефектами. Основні результати дослідження напруженодеформівного стану (НДС) для тіл з тріщинами представлені в монографіях Камінського А. О., Кіта Г. С. і Хая М. В., Партона В. З. і Кудрявцева Б. А., Морозова М. Ф., Панасюка В. В., Попова Г. Я., Прусова І. А., Саврука М. П., Черепанова Г. П. та інших.

У наш час композитні матеріали широко використовуються в якості конструкційних матеріалів. Дослідження тріщин, котрі виникають на границі поділу різних складових композитних матеріалів (міжфазних тріщин) має велике значення, так як ці тріщини в більшості випадків призводять до руйнування конструкцій, виготовлених з таких матеріалів. В наш час існують дві основні математичні моделі міжфазних тріщин. Перша модель – це «відкрита» тріщина. Вона не називається класичною (осциляційною) моделлю. Ця модель має суттєвий недолік – напруження та переміщення берегів тріщини біля її вершини мають осцилюючі особливості, що приводить до фізично нереального взаємопроникнення матеріалів. Вагомий внесок в дослідження міжфазних тріщин в рамках класичної моделі зробили Грілицький Д. В., Моссаковський В. І., Прудов І. А., Рибка М. Т., Сулим Г. Т., Черепанов Г. П., Clements D. L., Erdogan F., Rice J. R., Sih G. C., Ting T. C., Williams M. L. та інші. Другу, тобто контактну модель міжфазної тріщини вперше запропонувала Comninou M. В цій моделі вважається, що біля вершин тріщини береги контактирують. Вона є більш складною, але дозволяє усунути недолік, пов’язаний з наявністю осцилюючої особливості біля вершини тріщини. Контактна модель досліджувалася в роботах Антонова Ю. В., Кіта Г. С., Лободи В. В., Мартиняка Р. М., Острика В. І., Симонова І. В., Смирнова С. О., Улітка А. Ф., Comninou M., Dundurs J., Suhirchen A. K., Hettmann K. P., Mai Y. W., Qin Q. H. та інших.

Внутрішні міжфазні тріщини вивчені на даний час досить повно як в класичній постановці, так і з врахуванням контакту берегів. У той же час міжфазні тріщини, що виходять на край тіла, досить часто зустрічаються на практиці, але їх дослідженю присвячено значно менше уваги ніж внутрішнім тріщинам. Тут слід навести роботи Острика В. І. та Улітка А.Ф., Rice J. R. і Sih G. C., Erdogan F. як в рамках різних моделей аналізується напіввіскінчена тріщина між двома згорненими матеріалами. Слід зауважити, що якщо розмір тіла набагато більший характерного розміру області навантаження та її відстані до вершини крайової тріщини, то ефекти, які мають місце в околі вершини тріщини будуть схожими з тими, які мають місце для випадку, коли границі тіла пря-

мують до нескінченності. Тому, якщо окрему області для тіл з тріщинами будемо вважати нескінченності а тріщини, що виходять на відповідний віддалений край тіла, коротко називати зовнішніми. Оскільки, як уже відзначалось, такі тріщини недостатньо винесені навколо в рамках класичної моделі, то їх дослідження для анізотропних та п'єзоелектричних матеріалів є актуальним.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота проводилась згідно з ініціюальним планом та готовки аспіранта кафедри теоретичної та прикладної механіки Дніпропетровського національного університету та в межах науково-дослідницьких тем № 168-00 "Аналіз певворотних процесів деформування та розробка методики розрахунку основних та змінних задач теорії пружності, пластичності, стиків та руйнування для однорідних та кусково-однорідних біматеріалів", номер державної реєстрації № 0100V005240, 2000-2002 рр., 7-062-03 "Дослідження проблем міжфазної стискості та руйнування кусково-однорідних (огріючих, анізотропних) та п'єзоелектричних тіл з міжфазними дефектами", номер державної реєстрації № 01031-000578, 2003-2005 рр.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є розвиток аналітичних методів та розв'язок плоских задач для зовнішніх міжфазних тріщин з зонами контакту під дією термомеханічного навантаження в анізотропному біматеріалі, а також дослідження зовнішньої електро-проникної та електроізольованої тріщини в п'єзоелектричному біматеріалі в зоні електромеханічного навантаження.

Для досягнення сформулюваного мети було поставлено наступні задачі:

- побудувати представлення компонент напруженості деформівного та електричного стану через кусково-голоморфні вектор-функції, які є зручними для дослідження зовнішніх міжфазних тріщин в анізотропних та п'єзоелектричних біматеріалах;
- сформулювати на основі цих представлень залогу чинного спряження, що відповідають класичній та контактній моделям зовнішньої міжфазної тріщини;
- побудувати аналітичні розв'язки вказаних задач;
- провести чисельну реалізацію одержаних розв'язків з метою встановлення нових особливостей деформування зовнішніх міжфазних тріщин в анізотропних та п'єзоелектричних біматеріалах.

Об'єктом дослідження в роботі є кусково-однорідні анізотропні та п'єзоелектричні тіла з зовнішніми міжфазними тріщинами, зокрема такими, що мають зони контакту в околі їх вершин.

Предметом дослідження є розробка методів розрахунку та дослідження особливостей НДС в околі вершин зовнішніх міжфазних тріщин з врахуванням контакту їх берегів.

Методи дослідження. Первою складовою методики дослідження є побудова представлень компонент напруженості деформівного та електричного стану через кусково-голоморфні вектор-функції. Існування складової базується на формулюванні та побудові точних аналітичних розв'язків задач лінійного спряження для різних моделей зовнішньої міжфазної тріщини. При чисельній реалі-

зації одержаних результатів використані методи розв'язку трансцендентних рівнянь, а для апробації одержаних розв'язків – метод скінчених елементів.

Наукова новизна одержаних результатів.

В дисертаційній роботі одержані наступні нові результати

- на основі відомих представлень компонент НДС через кусково-голоморфні вектор-функції одержано нові представлення вказаного типу, які є зручними для дослідження зовнішніх міжфазних тріщин в анізотропному та п'єзоелектричному матеріалах;
- вперше задача для зовнішньої міжфазної тріщини з зоною контакту між двома анізотропними матеріалами під дією механічного навантаження зведена до комбінованої крайової задачі Діріхле – Рімана, яка розв'язана точно. Одержано трансцендентне рівняння для визначення довжини зони контакту, а також явні вирази для напружень і їх коефіцієнтів інтенсивності; враховано вплив температурного поля на довжину зони контакту і відповідний коефіцієнт інтенсивності зсувного напруження.
- вперше проаналізована зовнішня міжфазна тріщина з зоною контакту в п'єзоелектричному біматеріалі. Розглянуто моделі електро-проникної та електроізольованої тріщин. В обох випадках шляхом зведення проблем до задач спільногого спряження Діріхле – Рімана та Гільберта знайдено реальні довжини зон контакту та відповідні коефіцієнти інтенсивності напружень та електричної індукції;
- становлено на основі конкретних обчислень механічні ефекти щодо впливу механічного навантаження та теплового поля на основні термомеханічні та електромеханічні характеристики в околі вершини зовнішньої тріщини; з метою порівняння одержаного аналітичного розв'язку для зовнішньої міжфазної тріщини в ортотропному біматеріалі одержано розв'язок відповідної задачі для тіла скінчених розмірів з крайовою міжфазною тріщиною методом скінчених елементів.

Обґрунтованість і достовірність наукових результатів забезпечується використанням достовірних моделей, коректністю фізичної та математичної постановок граничних задач, застосуванням відомих, перевірених іншими дослідниками аналітичних методів, узгодженням одержаних результатів з окремими відомими розв'язками, а також з результатами чисельного аналізу.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Запропоновані методики дозволяють визначати напруження і стрибки переміщень, а також додержувати коефіцієнти інтенсивності напружень та довжини зон контакту для міжфазних тріщин в анізотропних матеріалах під дією температурного поля та зовнішніх сил, а також для п'єзоелектричних матеріалів у випадку електро-проникної та електроізольованої тріщин, що дає можливість робити висновки про тріщиностійкість кусково-однорідних матеріалів. Крім того, одержані результати дозволяють виявити реальну картину деформування зовнішньої міжфазної тріщини і дозволяють використати ці закономірності при конс-

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступній частині** обґрунтовано актуальність роботи як з теоретичної, так і з практичної точки зору, а також подано стислу характеристику дисертаційної роботи.

У **першому розділі** приводиться огляд літератури, присвяченої дослідженю міжфазних тріщин з відкритими берегами та з зоною їх контакту, котрі розташовані на лінії поділу двох різнопідвидів ізотропних, анізотропних чи п'єзоелектрических матеріалів.

Далі розглянуто анізотропний біматеріальний простір зі змішаними умовами в площині поділу матеріалів $y=0$. Вважаючи, що всі компоненти НДС не залежать від координати x , одержано наступні представлення компонент НДС через кусково-гомоморфні вектор-функції:

$$[\mathbf{u}'(x)] = \mathbf{W}^+(x) - \mathbf{W}^-(x), \quad t^{(1)}(x, 0) = \mathbf{G}\mathbf{W}^+(x) - \bar{\mathbf{G}}\mathbf{W}^-(x), \quad (1)$$

де $\mathbf{W}(z) = \{W_1(z), W_2(z), W_3(z)\}^T$ – вектор-функція комплексної змінної z , яка аналітична у кожній півплощині, включаючи зчеплені ділянки інтерфейсу; $\mathbf{u}(x) = \{u_1(x), u_2(x), u_3(x)\}^T$, $t = \{\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{32}\}^T$, $\mathbf{G} = \{G_y\}_{i,j=1,3}$ – біматеріальна матриця, що визначається пружними характеристиками півпросторів, $[f] = f^+ - f^-$ – означає стрибок функції при переході через інтерфейс.

Вводячи нову вектор-функцію $\Psi(z) = \begin{cases} \mathbf{G}\mathbf{W}(z), & y > 0 \\ \bar{\mathbf{G}}\mathbf{W}(z), & y < 0 \end{cases}$, де символ з рискою означає комплексне спряження, одержуємо такі представлення для компонент НДС:

$$t^{(1)}(x, 0) = \Psi^+(x) - \Psi^-(x), \quad [\mathbf{u}'(x)] = \mathbf{Q}\Psi^+(x) - \bar{\mathbf{Q}}\Psi^-(x), \quad (2)$$

де $\mathbf{Q} = \mathbf{G}^{-1}$. Очевидно, що функція $\Psi(z)$ аналітична у кожній півплощині, а та-жок на тих відкритих ділянках лінії поділу матеріалів, на яких навантаження відсутні. Слід також відзначити, що співвідношення (1) і (2) забезпечують неперервність напружень при переході через інтерфейс. Ці співвідношення зручні для формульовання задач лінійного спряження при конкретних умовах на інтерфейсі.

Далі розглядаються крайові міжфазні тріщини в анізотропному біматеріалі (рис. 1). Вважається, що розмір тіла набагато більший, ніж довжина ділянки зчеплення $[c, d]$ і величини d та h .

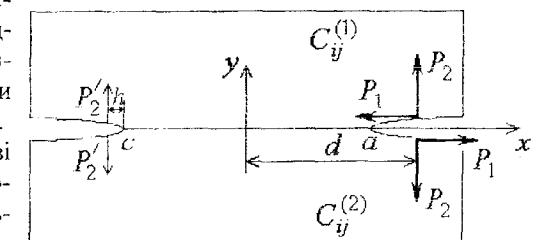


Рис. 1

Годі ефекти, які мають місце в околі вершин тріщин будуть співпадати з тими, які мають місце для випадку, коли границі тіла прямуватимуть до нескінченності. Тому в початковому будемо вважати тіла нескінченною. Крім того, якщо h

труюванні чисельних алгоритмів розв'язання задач з міжфазними тріщинами для біматеріальних тіл скінчених розмірів.

Апробація результатів дисертації. окрім результатів дисертаційної роботи доповідалися на:

- третій всеукраїнські наукові конференції «Математичні проблеми технічної механіки», що проходили у м. Дніпропетровську 22-24 квітня 2003 р.;
- сьомому міжнародному симпозіуму українських інженерів-механіків у Львові, 18-20 травня 2005 р.

У цілому дисертаційна робота обговорювалася на наукових семінарах кафедри теоретичної та прикладної механіки ДНУ та кафедри диференціальних рівнянь ДНУ, а також на семінарі відділу математичних методів механіки руйнування та контактних явищ Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Івано-Франківськ.

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 7 робіт. З них: 5 статей у наукових фахових виданнях, 2 тези докторантів.

Особистий внесок здобувача:

Основні результати були отримані автором самостійно. Стававтор робіт [1-3, 5-6] В. В. Лобода з науковим керівником дисертації, тому з ним обговорювалися постановки розглянутих задач, виконанням яких методів послідовнення та аналізувалися отримані результати.

Особисто О. С. Філіновій належать такі розриви в дисертаційній роботі і публікаціях наукові результати:

- побудова представлень механічних [1] та електромеханічних [3, 4] характеристик через кусково-гомоморфні вектор-функції;
- зведення класичної та контактної моделей для зовнішньої міжфазної тріщини в анізотропному біматеріалі під дією зосереджених сил [1] та температурного поля [2], а також для електро-проникної [3] та електропровідної [4] тріщин в п'єзоелектричному біматеріалі з зачепленням іншого спряження та розв'язок цих задач;
- виведення трансцендентних рівнянь, що визначають зони контакту та явних виразів для коефіцієнтів інтенсивності напружень [1-4, 6];
- чисельний аналіз одержаних аналітичних розв'язків та інтерпретація одержаних результатів [1-4, 6, 7];
- побудова скінчено-елементного розв'язку для крайової міжфазної тріщини з зоною контакту та його порівняння з аналітичними результатами [5].

Структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків і списку використаних джерел. Вона містить 136 сторінок машинописного тексту, 26 ілюстрацій, 26 таблиць, налічує 113 літературних джерел.

значно менше ніж довжина зони стиснення $[c, a]$, то вплив лівої тріщини та її навантаження на ефекти по виникненню в околі вершини правої, буде незначним. Тому в подальшому будемо звертати основну увагу на праву тріщину і при її дослідженії враховувати лише навантаження на неї. При необхідності аналогічний аналіз може бути проведений для лівої тріщини.

Спочатку поставлена задача розглядається в класичній постановці. Тобто вважається, що два ортотропних півпростори зміщені на ділянці $c < x < a$, $y = 0$, а на іншій частині інтервалу $x \in [c, a]$, $y \neq 0$ мають місце дві тріщини (рис. 1). Вважається також, що в точці $x = d$, $y = 0$ берегів правої тріщини діють зосереджені сили $\{P_1, P_2\}$, які не змінюються залежно від координати x_3 . Годі мас місце плоска деформація в площині (x_1, x_2) та векторах $\mathbf{t}^{(0)}$ і $[\mathbf{u}^0]$, а також у відповідних матрицях можна враховувати тільки ті перші компоненти. Умови на інтерфейсі мають вигляд

$$\sigma_{12} = 0, \quad x \in [c, a], \quad \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{11}, \sigma_{22} \geq 0, \quad x \in (c, a), \quad (3)$$

$$\sigma_{12} = P_1 \delta(x - d) \quad x \in c, \quad P_2 \delta(x - d) \quad x \in (c, a). \quad (4)$$

Виходячи з (2), можна записати:

$$\sigma_{12}^{(0)}(x, 0) = \psi_1^+(x) \cdot \psi_1^-(x), \quad [\nu'(x)] = q_1 \psi_1^+(x) + q_2 \psi_1^-(x), \quad q_1, q_2 \in (-1, 1), \quad (5)$$

$$\sigma_{22}^{(0)}(x, 0) = \psi_2^+(x) \cdot \psi_2^-(x), \quad [\nu'(x)] = q_1 \psi_2^+(x) + q_2 \psi_2^-(x).$$

Комбінуючи симвідношення (5), отримуємо:

$$\sigma_{12}^{(0)}(x, 0) + iS \sigma_{22}^{(0)}(x, 0) = F_1^+(x) - F_1^-(x), \quad [\nu'(x)] + im [\nu'(x)] = F_1^+(x) + \gamma F_1^-(x), \quad (6)$$

$$\text{де } F_j(z) = \psi_j(z) + iS_j \psi_j(z), \quad m_j = \sqrt{\frac{q_1 q_2}{q_{1j} q_{2j}}}, \quad q_{1j} = \frac{q_1 + m_j q_2}{m_j}, \quad q_{2j} = \frac{q_{22} + m_j q_{12}}{m_j},$$

$$(S_j = -m_j), \quad q_j = q_{21} - m_j q_{11}, \quad j = 1, 2, \quad q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22} - компоненти матриці \mathbf{Q}, \\ q_y - дійсні.$$

Задовільняючи умовам на інтерфейсі приходимо до такої задачі лінійного спряження для функції $F_i(z)$:

$$F_i^+(x) + \gamma_i F_i^-(x) = 0, \quad x \in (c, a) \quad f_i, \quad F_i^+(x) - F_i^-(x) = g_i(x) - \nu(x), \quad x \in (c, a), \quad (7)$$

$$\text{де } g_i(x) = (P_1 - iS_i P_2) \delta(x - d).$$

Було отримано, що дані розв'язок цієї задачі і знайдено відповідно до рівняння $F_i(z)$. Одержано також $F_i^+(x) = F_i^-(x)$, та вирази для похідних від стрижків нерівність та напружень на ділянці поділу матеріалів. Проводячи аналіз одержаних напружень для $x \in (c, a)$ і стрибків переміщень для $x > a$ отримали, що вони при $x \rightarrow a - 0$ і $x \rightarrow a + 0$, відповідно, нескінченну кількість разів змінюють знак,

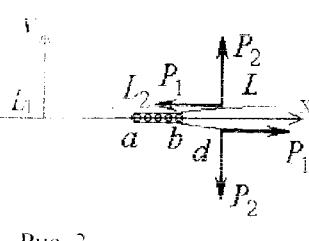


Рис. 2

тобто для такої моделі тріщини має місце добре відома осцилююча особливість, що характеризується фізично нереальним взаємопроникненням матеріалів.

З метою усунення осцилюючої особливості розглянута уточнена модель правої тріщини. Поблизу її вершини a введемо область гладкого контакту берегів (a, b) , з заздалегідь невідомим положенням точки b (рис. 2). Умови на інтерфейсі, окрім (3), включають:

$$\sigma_{12}^\pm = 0, \quad [\nu] = 0, \quad [\sigma_{22}] = 0, \quad x \in (a, b) = L_2, \quad (8)$$

$$\sigma_{12}^\pm = P_1 \delta(x - d), \quad \sigma_{22}^\pm = -P_2 \delta(x - d), \quad x \notin (c, b) = L. \quad (9)$$

Задовільняючи граничним умовам приходимо до наступної комбінованої крайової задачі Діріхле – Рімана:

$$F_1^+(x) + \gamma_1 F_1^-(x) = 0, \quad x \in L_1, \quad \operatorname{Re} F_1^+(x) = 0, \quad x \in L_2, \quad F_1^+(x) - F_1^-(x) = g(x), \quad x \in L. \quad (10)$$

Задача (10) є набагато більш складною, ніж (7). Але розв'язок цієї задачі при умові $F_i(z)|_{z \rightarrow \infty} = 0$ був також представлений у замкненому вигляді:

$$F_i(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i(d-z)} G(z), \quad (11)$$

$$\text{де } G(z) = \operatorname{Re} \left[\frac{P_1 - iS_1 P_2}{X_0(d)} \right] \frac{Y(z)}{Y(d)} + i \operatorname{Im} \left[\frac{P_1 - iS_1 P_2}{X_0(d)} \right], \quad X_0(z) = \frac{ie^{i\phi(z)}}{\sqrt{(z-c)(z-a)}},$$

$$Y(z) = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}, \quad \phi(z) = 2\varepsilon \ln \sqrt{\frac{\sqrt{(b-a)(z-c)}}{\sqrt{(b-c)(z-a)} + \sqrt{(a-c)(z-b)}}}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \gamma.$$

Аналітичний аналіз показав, що при $b \rightarrow a$ основні характеристики НДС знайдені у рамках контактної моделі зводяться до відповідних формул осцилюючої моделі, що говорить про правильність результатів, отриманих для контактної моделі.

Розв'язок (11) є математично коректним для довільного положення точки b . Однак, він буде фізично коректним, якщо будуть виконані наступні додаткові умови:

$$\sigma_{22}^\pm(x, 0) \leq 0 \text{ для } x \in [a, b], \quad [\nu(x)] \geq 0 \text{ для } x \geq b. \quad (12)$$

Останні умови будуть виконані, якщо тріщина в точці b закривається плавно, таким чином, що $\sqrt{x-b} [\nu'(x)]|_{x \rightarrow b+0} \rightarrow 0$. На основі цієї умови було отримано наступне трансцендентне рівняння для визначення відносної довжини області контакту λ :

$$\operatorname{tg} \{\phi(d)\} = S_1 \frac{P_2}{P_1}, \quad (13)$$

$$\text{де } \phi(d) = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1+\lambda} \sqrt{1-\chi} + \sqrt{1-(1+\lambda)\chi}}, \quad \chi = \frac{a-c}{d-c}, \quad \lambda = \frac{b-a}{a-c}. \quad \text{У випадку ма-$$

тих λ величин, що $1+\lambda \approx 1$, маємо } \phi(d) \approx \varepsilon \ln \frac{\lambda}{4(1-\chi)}, тобто наближений розв'язок рівняння (13) можна подати у вигляді:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} + 4(1 - x) \exp \left\{ \frac{1}{x} \left[\ln(xt_0) - S_1 \frac{P_1}{P_2} \right] + \pi n \right\}, \quad (14)$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Значення n потрібно вибирати так, щоб λ_0 представляло собою найбільший корінь рівняння (13) з проміжку $(0, \lambda^*)$, де $\lambda^* = \frac{d-a}{a-c}$. Точність розв'язку (14) з тим більшою, чим менше значення λ_0 . КІН зсувного напруження $k_s = \lim_{x \rightarrow a^-} \sqrt{2x(a-x)} \sigma_{xy}^{(0)}(x, 0)$ визначається формулou:

$$k_s = \frac{1+y_1}{\sqrt{2\pi y_1}} \sqrt{\frac{d-a}{(a-c)(c-d)}} \sqrt{P_1 + S(P_2)}. \quad (15)$$

На рис. 3 для $a=1m$, $P_1=1H/m$, $d=1.5m$, приведена залежність відносних довжин областей контакту λ_0 від величини P_2 . Вибиралися біматеріали: алюміній/мідь (біматеріал I), комбінація ортотропних матеріалів з характеристиками:

$$C_{11}^{(0)} = 26.6C_{66}^{(0)}, \quad C_{12}^{(0)} = 3.15C_{66}^{(0)},$$

$$C_{22}^{(0)} = 3.6C_{66}^{(0)}, \quad (i=1,2).$$

$C_{66}^{(0)} = 33.45 \cdot 10^9 H/m$, $C_{66}^{(1)} = 75.75 \cdot 10^9 H/m$ (біматеріал II); ідеалізований матеріал з $\mu^{(0)} = 33.45 \cdot 10^9 H/m$, $\nu^{(0)} = 0.07$ із умовами на видирку $[c, a]$ нижньої границі, близькими до жорсткого закриття (біматеріал III).

В табл. 1 приведені значення КІН $k_s (H/m)$ для біматеріалу I за зону контакту з рис. 3. З отриманих результатів випливає, що зсувне навантаження P_1 суттєво впливає як на довжину зони контакту, так і на КІН k_s . При від'ємних значеннях P_1/P_2 довжини зон контакту можуть ставати співвімірними з довжиною ділянки зчеплення $[c, a]$, однак при додатніх і нульових значеннях P_1/P_2 зона контакту є дуже малою.

З метою апробації одержаного аналітичного розв'язку для зовнішньої міжфазної тріщини в ортотропному біматеріалі одержано розв'язок подібної за-

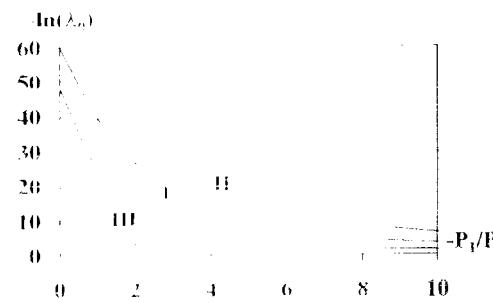


Рис. 3

Таблиця 1					
P_1/P_2	-10	-5	-2	-1	0
$a-c$					
0.25	-12.746	-6.467	2.837	-1.794	-1.268
0.5	-9.873	5.009	-2.197	-1.389	-0.982
1	-8.061	-4.09	-1.794	-1.134	-0.802
2	-6.981	-3.542	-1.553	-0.982	-0.695

дачі методом скінчених елементів. Розглядалась плоска деформація ізотропного нескінченно довгого по напряму осі x_3 тіла, поперечний переріз якого показано на рис. 4. Ділянка $[c, a]$ нижньої границі жорстко защемлена, а на ділянках $[0, c]$, $(a, h_1]$ граници виникли крайові тріщини. На ділянці (a, b) невідомої довжини в околі вершини правої тріщини має місце зона гладкого контакту, а її берега навантажені системою зосереджених сил (P_1, P_2) , які прикладені в точці c з координатами $(d, 0)$. Розв'язок задачі будувався при довільному положенні точки b . Щоб він був фізично коректним, потрібно, щоб виконувалися додаткові умови:

$$\sigma_{yy} \leq 0 \text{ для } x \in [a, b], \quad v \geq 0 \text{ для } x \in [b, h_1]. \quad (16)$$

Розв'язок отримано методом скінчених елементів. Вибирались восьмивузлові елементи, які подрібнювалися при наближенні до тріщини і особливо до її правої вершини. Визначались вінваріантні J -інтегали в околі точок a і b , через які по відомим формулам знаходились КІН. Для конкретного положення точки b відношення P_1/P_2 варіювалось, до тих пір поки

мало місце плавне закриття тріщини в точці b (відповідний КІН ставав близьким до нуля). В припущені, що $a-c \approx 0.1h_2$ одержаний результат порівнювався зі знайденим вище відповідним аналітичним розв'язком для нескінченої області, одержаним при тих же значеннях матеріальних констант. Похибка у відношенні відносної довжини зони контакту складала 3.55%, що говорить про довіру у відданість результатів, одержаних абсолютно різними методами.

У другому розділі спочатку проводиться аналіз осциляційної моделі для лінійних тріщин під дією температурного поля. Припустимо, що біматеріальні піни юній нагріті (охолоджені) на температуру ΔT . Використовуючи підхід Волтера вважаємо, що температурні напруження $\sigma_y^t = 0$, а температурні переміщення $u_j^t = \alpha_{ij} \Delta T x_j$, де α_{ij} – коефіцієнти лінійного теплового розширення. Останні справедливі, якщо півплощини не зв'язані.

Вважаючи, що ортотропні півплощини зчеплені на ділянці I_1 , а на іншій частині інтервалу $x < c$ та $x > a$ вони вільні від напружень (рис. 4 для $P_1 = P_2 = P^*$, $\alpha = 0$), одержуємо:

$$(u_i + u_i^t)^{(0)} = (u_i + u_i^t)^{(2)}, \quad \sigma_{yy}^{(0)} = \sigma_{yy}^{(2)} \text{ для } x \in [c, a]. \quad (17)$$

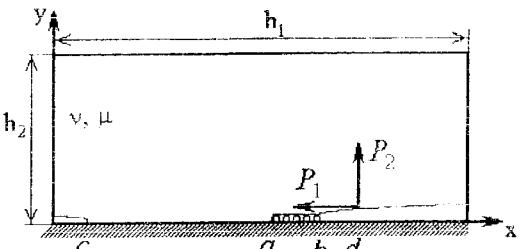


Рис.4

Використовуючи співвідношення (6) приходимо до наступної задачі лінійного спряження:

$$F_1(v) + F_2(v) = f(t), \quad v \in [c, d], \quad (18)$$

з умовою на нескінченості $F_1(v)|_{v \rightarrow \infty} = 0$, де $F_2(v) = \frac{m}{g} \Delta_0^2 \lambda_0^2 + (\alpha_n^{(2)} - \alpha_n^{(0)}) \Delta T$.

Було знайдено вираз для $F_2(v)$ та стрибок похідної від переміщень при переході через інтерфейс, який має осцилюючу особливість. Для усунення цієї особливості (аналогічно розділу 1) розглянута уточнена модель правої тріщини (рис.2 для $P_1 = P_2 = 0$), яка припускає наявність зони контакту (a, b) . В цьому випадку має місце наступна комбінована країкова задача Рімана:

$$F_1(v) + \rho_2 F_2(v) = f(t), \quad v \in [c, d], \quad (19)$$

$$\operatorname{Re} F_2(v) = 0, \quad v \in (a, b), \quad (20)$$

з умовою на нескінченості $F_2(v)|_{v \rightarrow \infty} = 0$.

Приведено точний розв'язок цієї задачі та вираз для стрибка похідної від переміщень при переході через інтерфейс. Аналогічно для міжфазної тріщини під дією зосереджених сил було знайдено трансцендентне рівняння для визначення відносної довжини області контакту:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2x}{\sqrt{1+x}} \operatorname{de} \beta = 2x \ln \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}, \quad (21)$$

КІН k_2 в цьому випадку має вигляд:

$$k_2 = \sqrt{\frac{\pi(a-c)m}{\rho_2 g_1}} \Delta_0 (1 - k_0). \quad (22)$$

Далі розглядалась зовнішня міжфазна тріщина під дією температурного поля й зосереджених сил. У силу лінійності задачі, її розв'язок може бути проведений для температурного та силового навантажень окремо. Всі ж необхідні характеристики напруженно-деформованого стану знаходяться суперпозицією розв'язків вказаних задач.

Був проведений чисельний аналіз результатів, отриманих у випадку термоінтенсивної задачі, для зовнішньої міжфазної тріщини з зоною контакту.

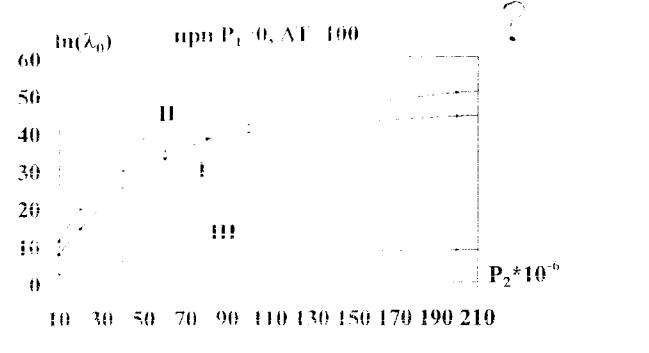


Рис.5

На рис. 5 та 6 для $c = 1m$, $a = 1m$, $d = 1.5m$, $P_1 = 0$ приведені значення відносних довжин області контакту λ_0 в залежності від величини P_2 (при $\Delta T = 100$) та від величини ΔT (при $P_2 = 10^7 H/m$) відповідно. Характеристики біматеріалів ті ж, що і у розділі 1.

У третьому розділі буде проаналізовано зовнішні міжфазні тріщини в п'єзоелектричному матеріалі.

Спочатку розглядався випадок електро-проникної тріщини. Вважалось, що тріщина розташована між двома різнопідкладками $x_3 \geq 0$ і $x_3 \leq 0$ з характеристиками, що визначаються матрицями $E_{ijkl}^{(1)}$ і $E_{ijkl}^{(2)}$ відповідно. При цьому:

$$E_{ijkl}^{(m)} = \begin{cases} C_{ijkl}^{(m)}, & J, K = 1, 2, 3; \\ e_{ij}^{(m)}, & J = 1, 2, 3; K = 4; \\ e_{ikl}^{(m)}, & K = 1, 2, 3; J = 4; \\ -e_{il}^{(m)}, & J = K = 4; \end{cases} \quad (m=1, 2),$$

а C_{ijkl} , e_{ij} , e_{ikl} – пружні модулі, п'єзоелектричні та діелектричні константи відповідно.

На основі відомих представлень для п'єзоелектричного біматеріалу шляхом спретворень, аналогічних розділу 1, одержані вирази типу (2). Вважалось, що геометричні характеристики та навантаження, аналогічні рис. 1, а п'єзоелектричні матеріали відносяться до класу 6 *mm* і поляризовані у напрямку y_3 . Слід відзначити, що для випадку повноту електропроникного інтерфейсу електричну індукцію $D_3(x_1, 0)$ вдається виразити через механічні фактори, тому задача лінійного спряження для функції $F_1(z)$ аналогічна (7). Її розв'язок одержано у замкнутому вигляді і знайдено вирази для стрибка похідної від переміщень та напружень при переході через інтерфейс.

Аналогічно розділу 1 для усунення осцилюючої особливості було використано контактну модель. Умови на лінії поділу матеріалів у цьому випадку мають вигляд:

Механічні умови:

$$\begin{aligned} u_1^- = u_1^+, \quad u_3^- = u_3^+, \quad \sigma_{11}^+ = \sigma_{11}^-, \quad \sigma_{33}^+ = \sigma_{33}^-, \quad x_1 \in I_1, \\ \sigma_{13}^+ = 0, \quad [u_3] = 0, \quad [\sigma_{33}] = 0, \quad x_1 \in I_2, \\ \sigma^+ = P \delta(x_1 - d), \quad \sigma^+ = -P \delta(x_1 - d), \quad x_1 \in I_3. \end{aligned} \quad (23)$$

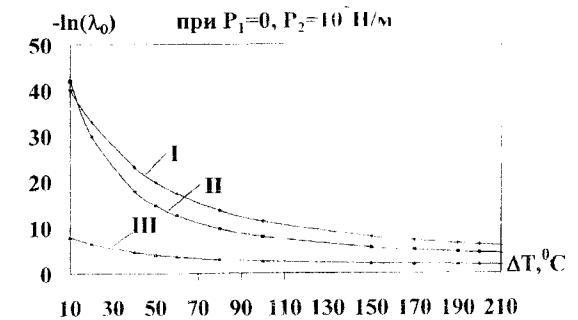


Рис.6

- електричні умови

$$\phi = \phi^+ - D_1^+ + A_1 e^{-\lambda_1(x_1 - c)}, \quad (24)$$

де ϕ – електричний потенціал.

Задовільняючи трансцендентним умовам (23), (24) була отримана комбінована крайова задача Діріхле – Рімана. Вона формально співпадає з (10) і її розв'язок одержано аналогічно (11). Використовуючи умови типу (12) отримано трансцендентне рівняння для визначення відносної довжини області контакту λ аналогічне (13) та його асимптотичний розв'язок. Із цим знаходить КІН зсувного напруження, який визначає можливість розвитку тріщини і виражається формулою, близькою до (15).

Для чисельного аналізу вважалось, що верхній матеріал РЗТ 4, а нижній – РЗТ 5, $c = 1 \text{ м}$, $a = 1 \text{ м}$, $P = 1 \text{ Н/м}$. Аналіз показав, що $\gamma = 10328$, $\varepsilon = 0.0051$. У

табл. 2 для різних d наведені значення відносних довжин області контакту λ_0 залежно від величини P_1 , а на рис.

7 наведені значення КІН k_2 . З отриманих ре-

P_1	1	2	5	10	100
d/a	$2.56 \cdot 10^{-66}$	$2.72 \cdot 10^{-66}$	$3.68 \cdot 10^{-66}$	$1.54 \cdot 10^{-9}$	$9.91 \cdot 10^{-2}$
a/c	$4.26 \cdot 10^{-66}$	$4.53 \cdot 10^{-66}$	$6.13 \cdot 10^{-66}$	$2.57 \cdot 10^{-9}$	$1.77 \cdot 10^{-1}$
0.25					
0.5					
1					
2					

Таблиця 2

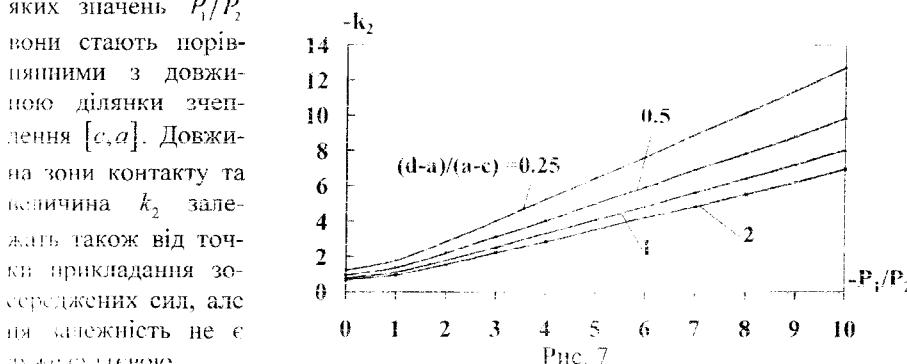


Рис. 7

Далі розглядалася задача, аналогічна попередній, але в припущеннях, що тріщини $x_1 < c$ та $x_1 > a$ (рис. 8) електроізольовані, тобто силові лінії електричного поля гальмуються заповнювачем тріщини. Така математична модель може бути важливою, коли розріз між двома п'єзоелектричними матеріалами заповнений електроізоляційною речовиною. Вважалось, що додатково до механічного навантаження на берегах правої тріщини можуть бути розташовані зосереджені електричні зміщення d_b (Кл/м).

Виходячи з представлень компонент електро-механічного стану через кусково-аналітичні вектор-функції були одержані наступні вирази для комбінації компонент ГДС:

$$[u'_i(x_i)] + m_{jA}[\phi'(x_i)] + im_{ji}[u'_i(x_i)] = F_i^+(x_i) + \gamma_j F_j^-(x_i), \quad (25)$$

$$n_{j1}\sigma_{11}^{(i)}(x_i, 0) + i\{n_{j3}\sigma_{33}^{(i)}(x_i, 0) + n_{j4}D_3^{(i)}(x_i, 0)\} = F_i^+(x_i) - F_j^-(x_i), \quad (26)$$

де $F_i^{\pm}(z)$ – функції, аналітичні у кожній півплощині, а також на неінавантажених півниках берегів тріщини.

Механічні умови на інтерфейсі співпадають з (23), а замість (24) маємо:

$$D_3 = d_b \delta(x_i - a), \quad x_i \in L, \\ [\phi] = 0, \quad [D_3] = 0, \quad x_i \in L_1 \cup L_2. \quad (27)$$

Комбінована крайова задача у цьому випадку має вигляд:

$$\begin{cases} F_i^+(x_i) + \gamma_j F_j^-(x_i) = 0 \text{ на } L_1, \\ \operatorname{Re} F_i^+(x_i) = 0 \text{ на } L_2, \\ F_i^+(x_i) - F_j^-(x_i) = g_j(x_i) \text{ на } L, \end{cases}$$

$$g_j(x_i) = \{n_{j1}P_1 + i(n_{j3}P_2 + n_{j4}d_0)\}, \quad j = 1, 3, 4.$$

На відміну від електроніконої тріщини, її розв'язки комбінованої крайової задачі Діріхле – Рімана слід розшукувати як при $j=1$, так і при $j=4$, а новий розв'язок будеться шляхом спільного використання функцій $F_i(z)$ і $F_j(z)$. Були знайдені всі

електромеханічні фактори у явному вигляді тобто переміщення, напруження та електрична індукція на відповідних проміжках ліній поділу матеріалів. Основні коефіцієнти інтенсивності (КІ) напружень та електричної індукції вводились за допомогою формул,

$$k_1 = \lim_{x_i \rightarrow a^+} \sqrt{2\pi(b-x_i)} \sigma_{33}^{(i)}(x_i, 0), \quad k_2 = \lim_{x_i \rightarrow a^-} \sqrt{2\pi(a-x_i)} \sigma_{11}^{(i)}(x_i, 0),$$

$$k_4 = \lim_{x_i \rightarrow b^-} \sqrt{2\pi(b-x_i)} D_3^{(i)}(x_i, 0)$$

також виконані в лінійному вигляді. Побудований розв'язок є математично правильним, та його фізичне положення точки b . Однак він буде фізично правильним тільки якщо будуть виконані додаткові умови:

$$\sigma_{11}^{(i)}(x_i, 0) \leq 0 \text{ для } x_i \in L_2, \quad [u_i(x_i, 0)] \geq 0 \text{ для } x_i \geq b.$$

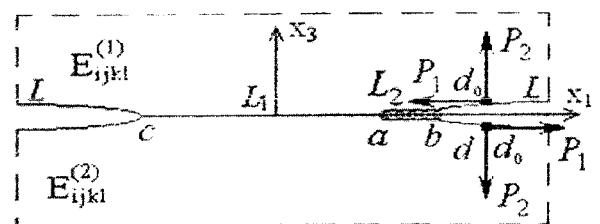


Рис.8

Показано, що ці умови будуть виконані, якщо $b \in [b_1, b_2]$, де положення точки b_1 визначається з рівняння $\ln(\lambda_1) - k_1'v(b_1) = 0$, а положення точки b_2 з рівняння: $k_1 = 0$. Тобто у випадку електроізольованої тріщини первинності (12) однозначно не визначають положення точки b . Доведено, що це положення визначається на основі не однієї додаткової умови, яка витікає з теореми про мінімум потенціальної енергії. Використання цієї умови показує, що дійсне положення точки b співпадає з b_2 . Були отримані рівняння для визначення відносного положення точок b_1 і b_2 , які визначаються величинами λ_1 та λ_2 :

На рис. 9 для $c = 1\text{m}$, $a = 1\text{m}$, $P = 1\text{H/m}$, $v = 1\text{m/s}$, $\sigma = 0$ приведені значення відносного положення точок b_1 , b_2 , які визначаються величинами λ_1 , λ_2 , відповідно, в залежності від величини P . Вибираємо матеріали PZT 4/PZT 5. В табл. 3 приведені значення КІ $k_1^{(1)}(H/m^2)$ і $k_1^{(2)}(K/m^2)$, що відповідають різним значенням співвідношення P_1/P_2 .

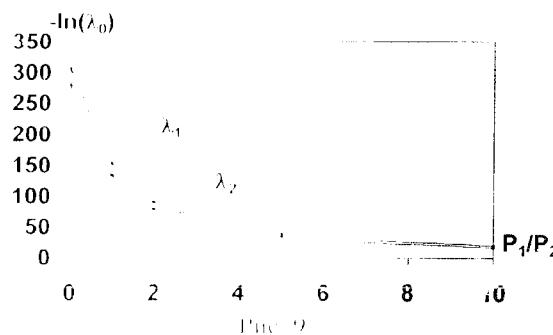


Рис. 9

P_1/P_2	-100	-10	-2	-1	
$k_2^{(1)}$	-126.15	-12.43	-5.97	-1.75	-0.0701
$k_2^{(2)}$	-126.15	-12.47	6.03	1.88	-0.240
$k_1^{(1)}$	$-4.59 \cdot 10^{-10}$	$-3.28 \cdot 10^{-10}$	$-3.08 \cdot 10^{-10}$	$-2.95 \cdot 10^{-10}$	$-1.39 \cdot 10^{-10}$
$k_1^{(2)}$	$-4.17 \cdot 10^{-10}$	$-2.84 \cdot 10^{-10}$	$-1.66 \cdot 10^{-10}$	$-2.26 \cdot 10^{-10}$	$-1.35 \cdot 10^{-10}$

З отриманих результатів випливає, що у випадку електроізольованої тріщини ненульовим КІ є не тільки КІ зсувного напруження k_1 , а і КІ електричного зміщення k_2 , який також може мати вплив на можливість розвитку тріщини.

У висновках сформульовано основні результати досліджень.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі розглянуті класична та контактна моделі для зовнішньої міжфазних тріщин в анізотропному біматеріалі під дією зосереджених сил та температурного поля. В рамках вказаних моделей досліджена також зовнішня електроізольована тріщина в п'єзоелектричному біматеріалі. В роботі був проведений розвиток аналітичних методів і одержано нові аналітичні розв'язки вказаних задач для тріщин в анізотропних та п'єзоелектрических матеріалах.

Основні результати дисертаційної роботи полягають у наступному:

- створено нові представлення компонент напружено-деформованого стану в анізотропному біматеріалі через кусково-голоморфні вектор-функції. Ці функції є аналітичними у верхній та нижній півплощинах, а також на відкритих неспаїнгованих ділянках інтерфейсу. Вони є зручними для формульовання статичного спряження для зовнішніх міжфазних тріщин в таких біматеріалах. Подібні представлення компонент електромеханічного стану одержано також для п'єзоелектричного біматеріалу;
- розв'язана плоска задача для зовнішньої тріщини з зоною контакту між двома ортотропними півпросторами під дією механічного навантаження. За допомогою вищевказаных представлень вона зведена до комбінованої крайової задачі Діріхле – Рімана, для якої одержано точний аналітичний розв'язок; одержано трансцендентне рівняння для визначення довжини зони контакту, а також знайдені явні вирази для стрибків переміщень, нагружень і їх коефіцієнтів інтенсивності. Встановлені залежності цих величин, а також довжини зони контакту від механічних характеристик матеріалів та навантаження;
- з метою апробації одержаного аналітичного розв'язку для тріщини в ортотропному біматеріалі одержано розв'язок подібної задачі для крайової міжфазної тріщини з зоною контакту у тілі скінчених розмірів методом скінчених елементів. При умові, що розмір тіла набагато більший довжини ділянки зони контакту виявлено хорошу відповідність аналітичного та чисельного розв'язків;
- застосована зовнішня міжфазна тріщина з зоною контакту в анізотропному біматеріалі під дією комбінації зосереджених сил і температурного поля. Вивчені вплив температурного поля на довжину зони контакту і на відповідні коефіцієнти інтенсивності зсувного напруження;
- розвинута класична та контактна модель для зовнішньої міжфазної тріщини в п'єзоелектричному біматеріалі. Розглянуто випадки електроізольованої та електроізольованої тріщин. З використанням вищезгаданих компонент електромеханічного стану через кусково-голоморфні вектор-функції, вказані проблеми зведені до задач лінійного спряження Діріхле – Рімана та Гільберта. На основі аналітичних розв'язків цих задач одержані необхідні електромеханічні компоненти, а також реальні

довжини зон контакту та відповідні коефіцієнти інтенсивності напружень і електричної індукції.

- на основі чисельного аналізу отриманих аналітичних розв'язків досліджено вплив механічних характеристик матеріалів, напрямку та точок прикладення зосереджених сил та інтенсивності теплового поля на основні електромеханічні характеристики в околі вершини зовнішньої тріщини. Встановлено зокрема, що в більшості випадків довжина зони контакту є малою, але при наявності інтенсивного зсувного поля в околі вершини тріщини вона може становити співвідношення з довжиною зони змінення.

Запропоновані методики та одержані розв'язки дозволяють визначати переміщення, напруження, а також постійковати коефіцієнти інтенсивності напружень та довжини зон контакту міжфазних тріщин в анізотропних та п'єзоелектрических біматеріалах під дією зосереджених сил, температурного та електричного впливів. Ці методики та розв'язки можуть бути використані при визначенні тріщинності кусково-однорідних тіл з зовнішніми міжфазними тріщинами.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ ОПУБЛІКОВАНІ В РОБОТАХ

1. Лобода В. В., Черніецька (Філіппова О. С.) Контактна модель краєвої міжфазної тріщини в анізотропному біматеріалі під дією центральною зосередженою силою // Вісник Дніпропетровського університету. Серія Механіка. – Т.2. – Вип. 6. – 2002. – С. 75 – 84.
2. Лобода В. В., Філіппова О. С. Гермоіндуція залишків краївової міжфазної тріщини з зоною контакту в анізотропному біматеріалі // Машинознавство. – 2003. – № 5. – С. 3 – 9.
3. Лобода В. В., Філіппова О. С. Контактна модель зовнішньої електропроникної міжфазної тріщини в п'єзоелектрическому біматеріалі // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2006. – 49, №3. – С. 77 – 85.
4. Філіппова О. С. Контактная модель краевой электропронизированной трещины в пьезоэлектрическом биматериале // Вісник Дніпропетровського університету. Серія Механіка. – Т.2. – Вип. 10. – 2005. – С. 159 – 168.
5. Лобода В. В., Філіппова О. С. Об анализе контактной модели краевой міжфазной тріщини с помощью метода конечных элементов // Вісник Дніпропетровського університету. Серія Механіка. – 2005. – 11 Вип. 9. – С. 178 – 183.
6. Лобода В. В., Філіппова О. С. Контактная модель для краевой міжфазной тріщини в ортотропном матеріале // Третя всесукарійська наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки». – Дніпродзержинськ. – 2003. – С. 26.
7. Філіппова О. С. Контактна модель краївової міжфазної тріщини в п'єзоелектрическому біматеріалі під дією зосереджених сил. // Сьомий міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків. – Львів. – 2005. – С. 44 – 45.

АНОТАЦІЯ

Філіппова О. С. Плоскі задачі для складених анізотропних та п'єзоелектрических тіл з зовнішніми міжфазними тріщинами. Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівого твердого тіла. – Дніпропетровський національний університет.

В дисертації вивчаються особливості деформування зовнішніх міжфазних тріщин в анізотропних та п'єзоелектрических біматеріалах. Розглядаються випадки чисто механічного навантаження, а також комбінації температурного та сиutowого навантаження. Для п'єзоелектрических тіл розглядаються моделі електропроникної та електроізольованої тріщин. Знайдені нові вирази для компонент напруженості та деформівного стану через кусково-голоморфні вектор-функції, які є розв'язками для дослідження зовнішніх міжфазних тріщин. Розглядались випадки обертання тріщини в околі її вершини, але основна увага приділялась контактній тріщині, яка припускає наявність зони гладкого контакту берегів в околі вершини тріщини. В цьому випадку проблеми зведені до комбінованих краївових задач Штурма – Рімана, для яких представлена точні аналітичні розв'язки. Одержані зростаючі трансцендентні рівняння для знаходження довжини зони контакту, а також явні вирази для коефіцієнтів інтенсивності напруження та коефіцієнту інтенсивності електричної індукції у випадку п'єзоелектрического матеріалу. З метою підтвердження достовірності отриманого аналітичного розв'язку для зовнішньої тріщини одержано розв'язок аналогичної модельної задачі для тіла скінчених розмірів методом скінчених елементів. Проілюстровано ефекти щодо впливу механічного навантаження та теплового поля на основні механічні та електромеханічні характеристики в околі вершини зовнішньої міжфазної тріщини.

Ключові слова: міжфазна тріщина, зовнішня тріщина, зона контакту, коефіцієнти інтенсивності напружень.

ABSTRACT

Filippova O. S. The plane problems for composite anisotropic and piezoelectric bodies with external interface cracks. – Manuscript.

Thesis for Degree of the Candidate of Science in Physics and Mathematics by specialty 01.02.04 – mechanics of deformable solid. – Dnipropetrovsk National University. Dnipropetrovsk, Ukraine, 2007.

The thesis deals with the external cracks in anisotropic and piezoelectric bimaterial. The cases of pure mechanical loading as well as the combination of thermal and mechanical loading are considered. The models of the electrically permeable and electrically insulated cracks are considered for piezoelectric materials. New expressions for the components of stress-strain state via sectionally-holomorphic vector-

functions are found. These expressions are convenient for the investigation of external interface cracks. The cases of oscillating model were considered, but the main attention was devoted to the contact zone model, which admit the existing of a frictionless contact zone at the crack tip. In this case the problems are reduced to the combined Dirichlet-Riemann problems, which are solved exactly. Simple transcendental equations for the determination of the contact zone length and the clear expressions for the stress and electrical displacement intensity factors are obtained. The solution for an edge interface crack in a finite sized body is found by finite element method. This solution is compared with the associated analytical solution and good agreement is found. Different effects concerning the influence of mechanical loading and thermal field upon mechanical and electromechanical values at the external interface crack tip are illustrated.

Key words: interface crack, external crack, contact zones, stress intensity factors.

АНОТАЦІЯ

Филиппова О. С. Плоские задачи для составных анизотропных и пьезоэлектрических тел с внешними межфазовыми трещинами. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформированного твердого тела. – Днепропетровский национальный университет. Днепропетровск, 2007.

В диссертации изучаются особенности напряженно-деформированного состояния составных анизотропных и пьезоэлектрических тел с внешними трещинами на линии раздела материалов. Размеры тел предполагаются намного большими, чем размер участка сцепления, поэтому они аппроксимируются полупространствами.

Рассматривается нагружение берегов трещины сосредоточенными силами, а также комбинация такого нагружения с температурным, причем считается, что имеет место плоская деформация в плоскости перпендикулярной берегам трещины.

Для анизотропных биматериалов получены новые выражения для компонент напряжено-деформированного состояния через кусочно-голоморфные вектор-функции, которые удобны для исследования межфазовых трещин указанного типа. Подобные представления получены также для электромеханических компонент в случае пьезоэлектрических биматериалов, причем рассмотрены модели как электроникой, так и электронизированной трещин.

Вначале предполагалось, что трещины полностью открыты. На основании полученных представлений формулировались задачи линейного сопряжения, для которых строились точные аналитические решения. Анализ этих решений показал, что в окрестности вершин трещин имеют место осциллирующие особенности, которые приводят к физически нереальному взаимонрониковению

материалов. Поэтому в дальнейшем основное внимание уделялось контактной модели, которая допускает наличие зоны гладкого контакта берегов возле вершины трещины. В этом случае для произвольной длины зоны контакта приведены следы к комбинированным краевым задачам Дирихле – Римана, для которых во всех рассматриваемых случаях биматериалов и условий на берегах трещины приведены точные аналитические решения. Получены достаточно простые аналитические выражения для всех необходимых электромеханических компонент. Из дополнительных условий, которые обеспечивают физическую корректность контактной модели, получены простые трансцендентные уравнения для нахождения длины зоны контакта, а также явные выражения для коэффициентов интенсивности напряжений и коэффициента интенсивности пьезоэлектрического материала.

С целью подтверждения достоверности аналитического решения для внешней трещины с зоной контакта получено решение аналогичной модельной задачи для краевой трещины в теле конечных размеров методом конечных элементов. Выбирая участок сцепления в 10 раз меньше, чем характерный размер области и сравнивая найденную длину зоны контакта с аналитическим решением для бесконечной области, получено их хорошее соответствие.

Проиллюстрированы эффекты влияния механической нагрузки и теплового поля на основные механические и электромеханические характеристики в окрестности вершины внешней межфазовой трещины. В частности показано, что отношение длины зоны контакта к длине участка сцепления зависит от механических характеристик материалов, направления и точек приложения сосредоточенных сил и в большинстве случаев является достаточно малым. В то же время при нагружении, которое вызывает значительное сдвиговое поле в окрестности вершины трещины, длина зоны контакта, как для анизотропного, так и для пьезоэлектрического биматериалов может становиться соизмеримой с длиной участка сцепления.

Ключевые слова: межфазовая трещина, внешняя трещина, зона контакта, коэффициенты интенсивности напряжений.

Підписано до друку 28.03.2007 р. Формат: 60x90/16.
Папір друкарський. Друк плюсний. Гарнітура Times New Roman.
Умов. друк. арк. 1. Тираж 100 прим. Замовлення № 576.

Друкарня ДНУ, вул. Наукова, 5, м. Дніпроніпровськ, 49050