

ДНІПРОПЕТРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Чурілова Марія Сергіївна



УДК 517.5

**НЕРІВНОСТІ ТИПУ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ПОХІДНИХ
ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ
В ТЕОРІЇ АПРОКСИМАЦІЇ**

01.01.01 – математичний аналіз

А в т о р е ф е р а т
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дніпропетровськ–2007

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі математичного аналізу Дніпропетровського національного університету.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
БАБЕНКО Владислав Федорович,
Дніпропетровський національний університет,
завідувач кафедри математичного аналізу.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
ТИМАН Майор Пилипович,
Дніпропетровський державний аграрний
університет, завідувач кафедри вищої математики;

доктор фізико-математичних наук
РОМАНЮК Анатолій Сергійович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник.

Провідна установа: Київський національний університет імені Тараса Шевченка.

Захист відбудеться "18" травня 2007 року о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 08.051.06 при Дніпропетровському національному університеті за адресою: 49050, м. Дніпропетровськ – 50, вул. Козакова, 18.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Дніпропетровського національного університету за адресою: 49050, м. Дніпропетровськ – 50, вул. Козакова, 8.

Автореферат розісланий "26" березня 2007 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради



Вакарчук М. Б.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційна робота присвячена одержанню нових точних нерівностей типу Колмогорова для похідних дробового порядку, а також порівнянню точних констант у нерівностях для норм „проміжних” похідних періодичних і неперіодичних функцій багатьох змінних.

Актуальність теми. Нерівності для проміжних похідних функцій з різними областями визначення, тобто нерівності, що оцінюють L_q -норму деякої похідної функції через L_p -норму самої функції та L_s -норму її похідної більш високого порядку, відіграють важливу роль у багатьох галузях математики (математичний аналіз, теорія апроксимації, диференціальні рівняння, теореми вкладення, теорія некоректних задач та ін.). Особливо цікавими є непокрашувані нерівності такого типу, тобто нерівності з точними константами, оскільки саме вони мають найбільш яскраві застосування і їх доведення, як правило, приводить до створення нових методів, які в свою чергу використовуються для розв'язку інших задач.

Починаючи з робіт Е. Ландау, Ж. Адамара, Г. Харді, Дж. Літлвуда, на одержання таких нерівностей були спрямовані зусилля багатьох математиків. Одержана в 1939 р. нерівність А.М. Колмогорова і понині залишається одним з найбільш глибоких загальних результатів у цьому напрямку. З цієї причини нерівності для норм проміжних похідних часто називають нерівностями типу Колмогорова. В подальшому для похідних цілих порядків функцій, означених на всій числовій осі, напівосі, обмеженому інтервалі або одиничному колі, було одержана значна кількість точних нерівностей типу Колмогорова, хоча загальна задача залишається далекою від повного розв'язку.

Не менш важливими, ніж нерівності для похідних цілих порядків, є нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку. Але в цьому напрямку нам відомі тільки деякі точні нерівності, одержані С.П. Гейсбергом і В.В. Арестовим для дробових похідних у формі Маршона, нерівність Г.Г. Магаріла-Ільєєва і В.М. Тихомирова – для дробових похідних у формі Ліувілля та нерівність для похідних напівцілого порядку у формі Вейля, одержана В.Ф. Бабенком. Таким чином, точних результатів для похідних дробового порядку відомо значно менше, ніж для похідних цілого порядку, що зумовлює актуальність досліджень, спрямованих на одержання нових точних нерівностей типу Колмогорова для похідних дробового порядку.

Важливу роль у багатьох галузях математики відіграють також нерівності для норм „проміжних” похідних функцій багатьох змінних. Задача існування таких нерівностей розглядалася В.П. Ільїним, Г. Ерлінгом, Л. Ніренбергом, Е. Гальєрдо, В.А. Солонніковим, О.В. Бесовим, Е.М. Галєєвим, Г.Г. Магаріла-Ільєєвим та іншими математиками. Один з найцікавіших типів нерівностей для функцій багатьох змінних складають нерівності, які оцінюють норму мішаної похідної через норму самої функції та норми її частинних похідних. Точних нерівностей такого типу відомо зовсім небагато. Це результати В.М. Коповалова, Ю.М. Суботіна, Дінь-Дзунга і В.М. Тихомирова, О.П. Бусласва і В.М. Тихомирова, О.А. Тимошина, В.Ф. Бабенка, В.О. Кофанова і С.О. Пічугова.

Один із методів, що дозволив у одновимірному випадку одержати деякі нові точні нерівності типу Колмогорова, полягав у порівнянні точних констант у нерівностях для періодичних і неперіодичних функцій. Таке порівняння було здійснене В.Ф. Бабенком і С.А. Селівановою для періодичних і майже-періодичних функцій і В.Ф. Бабенком, В.О. Кофановим та С.О. Пічуговим для періодичних функцій і неперіодичних функцій, заданих на всій дійсній осі.

У багатовимірному випадку порівняти точні сталі можна далеко не для всіх типів нерівностей для періодичних і неперіодичних функцій, тому актуальною є задача знаходження тих типів нерівностей, для яких таке порівняння можна здійснити, а також застосування цього порівняння для одержання нових точних нерівностей.

Таким чином, обраний напрямок досліджень є актуальним і обґрунтованим.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота проводилася відповідно до загального плану досліджень кафедри математичного аналізу Дніпропетровського національного університету згідно науково-дослідних тем: 09–207–01 “Нерівності для похідних і екстремальні задачі аналізу”, номер державної реєстрації № 0101V001526; 1–071–04 “Нерівності для похідних. Оптимізація методів кодування та відновлення функцій”, номер державної реєстрації № 0104U000471; а також згідно науково-дослідної роботи, що виконується за рахунок другої половини робочого дня за темами: “Теорія апроксимації та підсумовування рядів і інтегралів” і “Апроксимація функцій та підсумовування рядів і інтегралів”.

Мета і задачі дослідження. Метою дослідження є одержання нових точних нерівностей типу Колмогорова для функцій однієї та багатьох змінних, а також застосування одержаних нерівностей для розв'язку деяких задач теорії апроксимації. Об'єктом дослідження є екстремальні властивості функцій однієї та багатьох змінних з різними областями визначення. Предметом дослідження є оцінки норм „проміжних” похідних (взагалі кажучи, дробового порядку) функцій однієї та багатьох змінних через норми самих функцій та їх похідних у різних функціональних просторах.

Для реалізації поставленої мети у дисертаційній роботі розв'язуються такі задачі.

1. Оцінка модуля або L_∞ -норми дробової похідної функції через L_1 -норму самої функції та L_s -норму її старшої похідної або через L_∞ -норму функції та її норму в деякому гільбертовому просторі.

2. Побудова екстремальних функцій для перевірки точності одержаних нерівностей.

3. Застосування одержаних точних оцінок, зокрема, до розв'язку задачі апроксимації необмеженого оператора диференціювання дробового порядку на деяких класах функцій.

4. Порівняння точних констант у нерівностях типу Колмогорова для періодичних і неперіодичних функцій багатьох змінних.

5. Знаходження необхідних і достатніх умов існування нерівностей для „проміжних” похідних функцій багатьох змінних у W_p -просторах.

точних констант у таких нерівностях з точними константами в нерівностях для періодичних функцій.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи є новими і становлять інтерес для фахівців, що займаються дослідженням екстремальних задач теорії апроксимації. Їх зміст полягає в наступному.

1. Для функцій, означених на всій числовій осі, напівосі або обмеженому інтервалі, встановлені точні нерівності, що оцінюють L_∞ -норму або модуль дробової похідної порядку $\alpha \in \left(0; 1 - \frac{1}{s}\right)$, $1 < s < \infty$, через L_∞ -норму самої функції та

L_s -норму її першої похідної. Для функцій, означених на осі, одержана точна нерівність, що оцінює L_∞ -норму дробової похідної порядку $\alpha \in (0; 2)$ через L_∞ -норми самої функції та її другої похідної.

2. Для функцій з гільбертових просторів отримані точні нерівності, що оцінюють L_∞ -норму або модуль дробової похідної функції (в одновимірному випадку) та L_∞ -норму гіперсингулярного інтеграла з однорідною характеристикою (в багатовимірному випадку) через L_∞ -норму та гільбертову норму самої функції. Одержані результати узагальнено на випадок банаховозначних функцій.

3. Розв'язана задача апроксимації необмеженого оператора дробового диференціювання обмеженими операторами на класах функцій, які задаються мажорантою модуля неперервності або обмеженнями на L_s -норму першої похідної функції (для функцій одного змінного), а також задача апроксимації необмеженого гіперсингулярного інтегрального оператора з однорідною характеристикою обмеженими операторами на класах функцій, які задаються мажорантою модуля неперервності (для функцій багатьох змінних).

4. Одержані співвідношення між точними константами в нерівностях, що оцінюють норму мішаної похідної через норму функції та норми її частинних похідних, для періодичних та неперіодичних функцій багатьох змінних.

5. Доведені необхідні й достатні умови існування нерівностей для „проміжних” похідних функцій багатьох змінних у W_p -просторах і знайдена залежність між точними константами в одержаних нерівностях і точними константами в аналогічних нерівностях для періодичних функцій. За допомогою знайденого співвідношення встановлені нові точні нерівності типу Колмогорова для функцій багатьох змінних.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи, а також методи їх отримання можуть бути застосовані в подальших дослідженнях, спрямованих на одержання нових точних нерівностей типу Колмогорова для функцій одного та багатьох змінних, розв'язання задачі Стечкина про апроксимацію необмежених операторів обмеженими, а також інших екстремальних задач теорії наближень.

Особистий внесок автора. Визначення напрямку досліджень і постановка задачі належать науковому керівникові професору В.Ф. Бабенку.

В дисертаційній роботі використовуються ідеї та дослідження, що містяться в наукових працях [5,7] і тезах доповідей [8], опублікованих здобувачем одноосібно.

та в наукових працях [1–4,6], опублікованих у співавторстві з В.Ф. Бабенком. В.Ф.Бабенку належить постановка задач та вказівки на можливі методи їх розв'язання. Докладне доведення теорем належить здобувачеві.

Апробація результатів дисертації. За результатами роботи було зроблено доповіді на:

- міждержавних науково-методичних конференціях “Комп’ютерне моделювання” (Дніпродзержинськ, 2000, 2001 рр.);
- XXIII конференції молодих вчених механіко-математичного факультета МДУ (Москва, 2001);
- міждержавних науково-методичних конференціях “Проблеми математичного моделювання” (Дніпродзержинськ, 2003, 2004, 2006 рр.);
- міжнародній математичній конференції ім. В.Я. Скоробогатыка (Дрогобич, 2004 р.);
- міжнародній конференції “Функціональні методи в теорії наближень, теорії операторів, стохастичному аналізі та статистиці II” (Київ, 2004 р.);
- міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми математики, механіки, інформатики”, присвяченій 85-річчю з дня народження професора С.Б. Стечкина та 75-річчю ТулДУ (Росія, Тула, 2005 р.);
- 13-й Саратовській зимовій школі “Сучасні проблеми теорії функцій та їх застосування” (Росія, Саратов, 2006 р.);
- підсумкових конференціях Дніпропетровського національного університету (Дніпропетровськ, 2003, 2004, 2005, 2006 рр.);
- наукових семінарах з теорії функцій (Дніпропетровський національний університет, керівники семінару: член-кор. НАН України, проф. Моторний В.П., проф. Бабенко В.Ф.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1–4], опубліковані також 10 тез доповідей, що були представлені на різних наукових конференціях.

Структура і обсяг роботи. Дисертація обсягом 150 сторінок машинописного тексту складається зі вступу, трьох розділів, висновків і списку літератури, який містить 91 найменування.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовані мети і задачі дослідження, визначені об'єкт і предмет дослідження, вказаний зв'язок роботи з науковими програмами, планами та темами, охарактеризована наукова новизна результатів, їх теоретичне і практичне значення, прокоментовано особистий внесок здобувача в наукові праці та ступінь апробації результатів дисертації, описано структуру та основні результати дисертаційної роботи.

В першому розділі дисертаційної роботи проводиться огляд літератури за темою, висвітлюються основні питання, які досліджуються за напрямком, відповідним до напрямку досліджень даної роботи. Наводяться основні відомі результати щодо точних констант у нерівностях типу Колмогорова для функцій

одного та декількох змінних і висвітлюються питання, які залишилися невирішеними.

Другий розділ роботи присвячений одержанню нових точних нерівностей типу Колмогорова для похідних дробового порядку та їх застосуванню до розв'язку задачі Стечкина апроксимації необмеженого оператора дробового диференціювання обмеженими на класах функцій, які задаються мажорантою модуля неперервності або обмеженнями на L_s -норму першої похідної функції (для функцій одного змінного), а також до розв'язку такої задачі для гіперсингулярного інтегрального оператора з однорідною характеристикою на класах функцій, які задаються мажорантою модуля неперервності (для функцій багатьох змінних).

У підрозділі 2.1 отримано нерівності, що оцінюють L_∞ -норму або модуль дробової похідної функції через L_∞ -норму самої функції та L_s -норму її старшої похідної цілого порядку.

Нехай $G = R$ або $G = R_+$ або $G = [a, b] \subset R$. Через $L_p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, будемо позначати простір вимірюваних функцій $f: G \rightarrow R$, норма в якому задається стандартним чином. Для $r \in N$ та $s \in [1, \infty]$ позначимо через $L_s^r(G)$ множини функцій $f: G \rightarrow R$, таких, що $f^{(r-1)}$ ($f^{(0)} = f$) локально абсолютно неперервна та $f^{(r)} \in L_s(G)$, і покладемо $L_{p,s}^r(G) := L_p(G) \cap L_s^r(G)$.

У пункті 2.1.1 для функцій, заданих на всій дійсній осі, одержано аналог відомого точного результату С.П. Гейсберга, що пов'язує рівномірні норми дробової похідної у формі Маршо порядку $\alpha \in (0;1)$, самої функції та її другої похідної. Отримана нерівність оцінює L_∞ -норму дробової похідної за Риссом порядку $\alpha \in (0;2)$ через L_∞ -норми самої функції та її старшої похідної порядку $r = 2, 3, \dots$ і є точною при $r = 2$.

Означення 2.1. Дробові похідні порядку $\alpha \in (0;1)$ у формі Маршо функцій $f: R \rightarrow R$ визначаються формулою

$$(D_+^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{1-\alpha}} dt$$

(коли ці інтеграли існують), де $\Gamma(x)$ – гамма-функція Ейлера.

Означення 2.2. Дробова похідна за Риссом порядку $\alpha \in (0;2)$ функції $f: R \rightarrow R$ визначається формулою

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{1}{2\Gamma(-\alpha)\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^{1-\alpha}} dh$$

(коли цей інтеграл існує); причому при $\alpha = 1$ нормуючий множник вважається рівним своєму граничному значенню при $\alpha \rightarrow 1$, тобто рівним $\left(-\frac{2}{\pi}\right)$.

Введемо функцію

$$\tilde{\varphi}_r(x) = \begin{cases} \varphi_r\left(x + (r-1)\frac{\pi}{2}\right), & x \in [-\pi; \pi]; \\ \max \varphi_r(t), & x \notin [-\pi; \pi], \end{cases} \quad (1)$$

де φ_r — це r -й 2π -періодичний інтеграл з нульовим середнім значенням на періоді від функції $\varphi_0(t) = \text{sgn} \sin t$.

Теорема 2.3. Нехай $\alpha \in (0; 2)$ і $r = 2, 3, \dots$. Тоді для всіх функцій $f \in L_{r, \infty}(R)$ справедлива нерівність

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leq \frac{\|D^\alpha \tilde{\varphi}_r\|_\infty}{\|\tilde{\varphi}_r\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{r}}} \|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{r}} \|f^{(r)}\|_\infty^{\frac{\alpha}{r}}. \quad (2)$$

При $r = 2$ нерівність (2) є непокривуваною та обертається на рівність для функцій (1).

У пункті 2.1.2 для функцій, заданих на всій числовій осі або напівосі, одержані точні адитивні та мультиплікативні нерівності, що оцінюють L_s -норми дробових похідних у формі Маршо порядку $\alpha \in (0; 1 - \frac{1}{s})$, $1 < s < \infty$, через L_s -норми самих функцій та L_s -норми їх перших похідних.

Для дробових похідних функцій, заданих на всій числовій осі, ми користуємось означенням 2.1; для функцій, заданих на напівосі, змістовним залишається тільки означення похідної $D_-^\alpha f$.

Нехай $1 < s' < \infty$, $0 < \alpha < \frac{1}{s'}$. Для довільних $x, h > 0$ введемо позначення

$$I_x := \int_0^x \left(\frac{1}{u^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)^{s'-1} du = h^{1-\alpha s' + \alpha} \int_0^{\frac{x}{h}} \left(\frac{1}{u^\alpha} - 1 \right)^{s'-1} du.$$

Теорема 2.6. Нехай $G = R$ або $G = R_+$, $1 < s < \infty$, $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{s}$. Для довільної функції $f \in L_{s, s}^1(G)$ справедливі такі точні нерівності: адитивні

$$\|D_-^\alpha f\|_\infty \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\Gamma(1-\alpha)h^\alpha} + \frac{h^{\frac{1}{s}-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^{\frac{1}{h}} \left(\frac{1}{u^\alpha} - 1 \right)^s du \right)^{\frac{1}{s}} \|f\|_\infty,$$

при будь-якому $h > 0$ та мультиплікативні

$$\|D_-^\alpha f\|_\infty \leq \frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha s')^{1-\alpha}} (as')^{\alpha} \left(\int_0^{\frac{1}{as'}} \left(\frac{1}{u^\alpha} - 1 \right)^s du \right)^{\frac{1}{s}} \|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{s}} \|f'\|_\infty^{\frac{\alpha}{s}}$$

(при $G = R_+$ обидві нерівності тільки для $D_-^\alpha f$).

Екстремальними функціями в цих нерівностях є: при $G = R_+$ — функції

$$f_h(x) = \begin{cases} I_x - \frac{1}{2} I_h, & 0 \leq x \leq h; \\ \frac{1}{2} I_h, & x > h, \end{cases}$$

при $G = R$ для похідної $D_-^\alpha f$ — функції

$$f_h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} I_h, & x < 0; \\ I_x - \frac{1}{2} I_h, & 0 \leq x \leq h; \\ \frac{1}{2} I_h, & x > h, \end{cases}$$

для похідної $D_+^\alpha f$

$$f_h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} I_h, & x < -h; \\ -I_{-x} + \frac{1}{2} I_h, & -h \leq x \leq 0; \\ \frac{1}{2} I_h, & x > 0 \end{cases}$$

($h > 0$).

У пункті 2.1.3 для функцій, заданих на обмеженому інтервалі, отримані точні поточкові адитивні оцінки дробових похідних у формі Маршо, з яких, завдяки обмеженості розглядуваних функцій, випливають нерівності, що оцінюють модуль дробової похідної порядку $\alpha \in (0; 1 - \frac{1}{s})$, $1 < s < \infty$, через L_∞ -норму функції та L_s -норму її першої похідної.

Означення 2.5. Для довільного $x \in (a, b)$ лівобічна дробова похідна Маршо порядку $\alpha \in (0; 1)$ функції $f : [a, b] \rightarrow R$ визначається формулою

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt,$$

правобічна — відповідно формулою

$$(D_b^\alpha f)(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(b-x)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b \frac{f(x) - f(t)}{(t-x)^{1+\alpha}} dt$$

(якщо ці інтеграли існують).

Нехай $p \in (1; \infty)$, $\alpha \in (0; 1 - \frac{1}{p})$. Для довільного $x \in (a, b)$ введемо позначення:

$$I_{x-}^p(t) = \int_t^x \left(\frac{1}{(x-u)^\alpha} - \frac{1}{(x-h)^\alpha} \right)^p du, \quad \text{якщо } h \in (a, x);$$

$$I_{x+}^p(t) = \int_x^t \left(\frac{1}{(u-x)^\alpha} - \frac{1}{(h-x)^\alpha} \right)^p du, \quad \text{якщо } h \in (x, b).$$

Наслідок 2.1. Нехай $1 < s < \infty$, $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{s}$, $x \in (a, b)$. Для довільної функції $f \in L^1_s[a, b]$ справедливі такі точні нерівності:

$$\left| (D_{a+}^\alpha f)(x) \right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(1-\alpha)} \left(2 + \frac{1}{\left(\frac{x-a}{x-h} \right)^\alpha - 1} \right) \cdot \left(\frac{1}{(x-h)^\alpha} - \frac{1}{(x-a)^\alpha} \right) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \|f\|_s \cdot (I_{x-}^{s-1}(h))^\frac{1}{s}$$

при всіх $h \in (a, x)$ з екстремальною функцією

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} I_{x-}^{s-1}(h), & a \leq t \leq h; \\ I_{x-}^{s-1}(t) - \frac{1}{2} I_{x-}^{s-1}(h), & h < t < x; \\ -\frac{1}{2} I_{x-}^{s-1}(h), & x \leq t \leq b; \end{cases}$$

та

$$\left| (D_{b-}^\alpha f)(x) \right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(1-\alpha)} \left(2 + \frac{1}{\left(\frac{b-x}{h-x} \right)^\alpha - 1} \right) \cdot \left(\frac{1}{(h-x)^\alpha} - \frac{1}{(b-x)^\alpha} \right) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \|f\|_s \cdot (I_{x+}^{s-1}(h))^\frac{1}{s}$$

при всіх $h \in (x, b)$ з екстремальною функцією

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} I_{x+}^{s-1}(h), & a \leq t \leq x; \\ I_{x+}^{s-1}(t) - \frac{1}{2} I_{x+}^{s-1}(h), & x < t < h; \\ \frac{1}{2} I_{x+}^{s-1}(h), & h \leq t \leq b. \end{cases}$$

У підрозділі 2.2 встановлюються нерівності для дробових похідних у формі Маршо (в одновимірному випадку) та для гіперсингулярних інтегралів з однорідною характеристикою (в багатовимірному випадку) дійснозначних та банаховозначних функцій з гельдерових просторів.

Наведемо означення цих просторів. Для $G = R$ або $G = R_+$ або $G = [a, b] \subset R$ будемо позначати через $C = C(G)$ простір всіх неперервних та обмежених на G функцій $f: G \rightarrow R$ зі стандартною нормою. Нехай $\omega(t)$ — деякий модуль неперервності. Через $H^\omega(G)$ позначимо простір функцій $f \in C(G)$, для яких величина

$$\|f\|_{H^\omega} = \|f\|_{H^\omega(G)} := \sup_{\substack{x, y \in G \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega(|x - y|)}$$

скінченна. Аналогічно визначається простір $H^\omega(R^n)$. При $\omega(t) = t^\beta$, $0 < \beta \leq 1$, замість H^ω будемо писати H^β .

У пункті 2.2.1 для функцій, заданих на всій дійсній осі або напівосі, одержані точні адитивні та мультиплікативні нерівності, що оцінюють L_∞ -норми дробових похідних у формі Маршо порядку $\alpha \in (0, 1)$ через L_∞ -норми та гельдерові норми самих функцій.

Для дробових похідних ми знову користуємось означенням 2.1 (для функцій, заданих на напівосі, розглядається лише похідна $D^+ f$).

Теорема 2.9. Нехай $G = R$ або $G = R_+$, $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Для довільної функції $f \in H^\beta(G)$ справедливі точні нерівності

$$\|D_+^\alpha f\|_\infty \leq \frac{\beta \cdot 2^{\frac{1-\alpha}{\beta}}}{(\beta - \alpha) \Gamma(1-\alpha)} \|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \|f\|_{H^\beta}^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

(при $G = R_+$ тільки для $D_-^\alpha f$) з екстремальними функціями

$$f_h(x) = \begin{cases} |x|^\beta - \frac{h^\beta}{2}, & x \in [-h; h] \cap G; \\ \frac{h^\beta}{2}, & x \in G \setminus [-h; h], \end{cases}$$

$h > 0$.

Для функцій з просторів $H^\omega(R)$ та $H^\omega(R_+)$, де $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності, одержані точні адитивні нерівності такого типу. Отримані також поточкові оцінки «лівобічних» дробових похідних функцій, заданих на напівосі, та (у пункті 2.2.2) дробових похідних функцій, заданих на обмеженому інтервалі, через L_∞ -норми та гельдерові норми самих функцій.

У пункті 2.2.3 одержані багатовимірні аналоги нерівностей у гельдерових просторах для норм гіперсингулярних інтегралів з однорідною характеристикою. Для $\alpha \in (0, 1)$ ці інтеграли визначаються наступним чином:

$$(D_\Omega^\alpha f)(x) = \frac{1}{d_{n,1}(\alpha)} \int_{R^n} \frac{f(x) - f(x - \xi)}{|\xi|^{n+\alpha}} \Omega\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi$$

(коли цей інтеграл існує), де функція Ω , що називається характеристикою, є однорідною степеня 0 відносно ξ ,

$$d_{n,1}(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{1+n}{2}}}{2^n \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right) \sin \frac{\alpha\pi}{2}}.$$

Нехай B_h^n — куля радіуса h з центром в початку координат у просторі R^n .

Теорема 2.14. Нехай $0 < \alpha < \beta \leq 1$, $\Omega(x)$ — невід'ємна, однорідна степеня α відносно x функція, інтегрована на одиничній сфері $S_{n-1} \subset R^n$. Для довільної функції $f \in H^\beta(R^n)$ справедлива точна нерівність

$$\|D_\Omega^\alpha f\|_\infty \leq \frac{2^{\frac{1-\alpha}{\beta}} \cdot \beta}{\alpha(\beta - \alpha) d_{n,1}(\alpha)} \int_{S_{n-1}} \Omega(\xi') d\xi' \|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \|f\|_{H^\beta}^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

з екстремальними функціями

$$f_h(x) = \begin{cases} |x|^\mu - h^\mu, & x \in B_h^n; \\ \frac{h^\mu}{2}, & x \in R^n \setminus B_h^n, \end{cases}$$

$h > 0$.

Точна адитивна нерівність такого типу одержана також для функцій з простору $H^\omega(R^n)$, де $\omega(t)$ – довільний модуль неперервності.

У пункті 2.2.4 всі результати, одержані для гельдерових просторів, узагальнено на випадок банаховозначних функцій.

У підрозділі 2.3 одержані результати застосовані до розв'язку задачі Стечкина про найкраще наближення необмеженого оператора дробового диференціювання лінійними обмеженими операторами на класах функцій, які задаються мажорантою модуля неперервності або обмеженнями на L_p -норму першої похідної функції (для функцій одного змінного), а також до розв'язку такої задачі для необмеженого гіперсингулярного інтегрального оператора з однорідною характеристикою на класах функцій, які задаються мажорантою модуля неперервності (для функцій багатьох змінних).

Третій розділ присвячений порівнянню точних констант у нерівностях, що оцінюють норму мішаної похідної через норму самої функції та норми її частинних похідних, для періодичних та неперіодичних функцій багатьох змінних.

Нехай G – це дійсна вісь R або відрізок $T = [0, 2\pi]$ з отождествленими кінцями. Нагадаємо, що для вектора $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\bar{1} \leq \bar{p} \leq \bar{\infty}$ (нерівності між векторами розуміються покоординатно), через $L_{\bar{p}}(G^n)$ позначається простір вимірюваних функцій $f: R^n \rightarrow R$ (2π -періодичних за кожною змінною, якщо $G^n = T^n$) зі скінченногою нормою

$$\|f\|_{L_{\bar{p}}(G^n)} = \left\| \left\| f \right\|_{L_{p_1}(x_1)} \right\|_{L_{p_2}(x_2)} \dots \left\| \right\|_{L_{p_n}(x_n)},$$

де запис $\| \cdot \|_{L_{p_i}(x_i)}$ означає, що береться L_{p_i} -норма за змінною x_i . Зауважимо, що коли $p = (p, \dots, p)$, маємо звичайну (скалярну) L_p -норму:

$$\|f\|_{L_{\bar{p}}(G^n)} = \|f\|_{L_p(G^n)}.$$

Для $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ будемо позначати через $\mathfrak{E}$ елементи B^n , який одержано з x вилученням i -ї координати x_i . Домовимося записувати x у вигляді $x = (x, x^i)$. Будемо позначати через $D^{k\bar{e}_i} f(x)$ k -ту частинну похідну функції f за i -ю змінною. Нехай $\bar{p}^i \in [1, \infty]^n$, $i = 0, \dots, n$. Позначимо через $L_{\bar{p}}^{m\bar{e}_i}(G^n)$ клас функцій $f(x) \in L_{\bar{p}}(G^n)$ (2π -періодичних за кожною змінною, якщо $G^n = T^n$), таких, що похідні $D^{k\bar{e}_i} f(x, \mathfrak{E})$, $k = 0, \dots, m-1$, локально абсолютно неперервні як функції x для майже всіх $\mathfrak{E} \in B^{n-1}$ та $f(x, \mathfrak{E}) \in L_{\bar{p}^i}(I)$, $I = [0, 2\pi]$. Для вектора $\bar{I} = (I_1, \dots, I_n) \in X^n$ позначимо

$$L_{\bar{p}}^{\bar{I}}(G^n) := \bigcap_{i=1}^n L_{\bar{p}^i}^{I_i \bar{e}_i}(G^n).$$

Нехай також

$$L_{\bar{p}^0, \bar{p}^1, \dots, \bar{p}^n}^{\bar{I}}(G^n) := L_{\bar{p}^0}(G^n) \cap L_{\bar{p}^1, \dots, \bar{p}^n}^{\bar{I}}(G^n).$$

Для функцій $f \in L_{\bar{p}^0, \bar{p}^1, \dots, \bar{p}^n}^{\bar{I}}(G^n)$ при $\bar{I} \in N^n$, $\bar{q}, \bar{p}^i \in R^n$, $\bar{I} < \bar{q}$, $\bar{p}^i < \bar{\infty}$, $i = 0, \dots, n$, розглядаються нерівності вигляду

$$\|D^{\bar{\alpha}} f\|_{L_{\bar{q}}(G^n)} \leq K \|f\|_{L_{\bar{p}^0}(G^n)}^{\mu_0} \prod_{i=1}^n \|D^{I_i \bar{e}_i} f\|_{L_{\bar{p}^i}(G^n)}^{\mu_i}, \quad (3)$$

де $D^{\bar{\alpha}} f$ – мішана похідна функції f порядку $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha} \in Z_+^n := (N \cup \{0\})^n$, показники μ_i такими, що $\mu_0 \in R_+^0 := R_+ \cup \{0\}$, $\mu_i \in R_+$ ($i = 1, \dots, n$).

У підрозділі 3.1 розглядається найпростіший випадок – коли всі метрики в обох частинах нерівності (3) однакові та скалярні. За таких умов нерівності цього типу виявляються можливими і для межових значень параметрів метрик $p = 1$ та $p = \infty$. Нами доведено, що коли нерівності мають місце і для періодичних, і для неперіодичних функцій, точні константи в цих нерівностях співпадають.

У підрозділі 3.2 ми переходимо до більш загального випадку – коли метрики різні та векторні; при цьому втрачаються межові значення параметрів метрик $\bar{p} = \bar{1}$ та $\bar{p} = \bar{\infty}$, оскільки відомі необхідні й достатні умови існування містять обмеження типу $\bar{1} < \bar{p} < \bar{\infty}$.

Достатні умови існування нерівностей (3) (а також більш загальних нерівностей такого типу, з мішаними похідними в правій частині) для функцій простору $L_{\bar{p}^0, \bar{p}^1, \dots, \bar{p}^n}^{\bar{I}}(G^n)$ при $\bar{I} < \bar{q}$, $\bar{p}^i < \bar{\infty}$, $i = 0, \dots, n$, були одержані О.В. Бессовим, необхідні й достатні умови – Е.М. Галєєвим. Для нерівностей типу (3) ці необхідні й достатні умови можна записати таким чином:

$$\sum_{i=0}^n \mu_i = 1, \quad (4)$$

$$\alpha_j = \mu_j I_j - \left(\sum_{i=0}^n \frac{\mu_i}{p_i} - \frac{1}{q_j} \right)_+, \quad j = 1, \dots, n, \quad (5)$$

Достатні умови існування нерівностей (3) (а також більш загальних нерівностей, з мішаними похідними в правій частині) для функцій з простору $L_{\bar{p}^0, \bar{p}^1, \dots, \bar{p}^n}^{\bar{I}}(R^n)$ при $\bar{I} < \bar{q}$, $\bar{p}^i < \bar{\infty}$, $i = 0, \dots, n$, були одержані О.В. Бессовим, їх необхідність було доведено Г.Г. Магарілі-Ільєєвим. Для нерівностей типу (3) ці необхідні й достатні умови можна записати в такому вигляді:

$$\sum_{i=0}^n \mu_i = 1, \quad (6)$$

$$\alpha_j = \mu_j I_j - \left(\sum_{i=0}^n \frac{\mu_i}{p_i} - \frac{1}{q_j} \right)_+, \quad j = 1, \dots, n, \quad (7)$$

$$\sum_{i=0}^n \frac{\mu_i}{p_j^i} - \frac{1}{q_j} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Зауважимо, що випадок скалярних p^i, q та строгої нерівності $\frac{1}{q} < \sum_{i=0}^n \frac{\mu_i}{p^i}$ міститься у

А.Д. Джабраїлова; випадок скалярних $p^0, q, p^1 = \dots = p^n = p$, $\mu_0 > 0$ – у В.А. Соловникова (і для p^0, q, p значення, рівні 1, не виключаються за деяких доповнюючих умов).

Варто сказати, що виконання (6)–(8) рівносильне виконанню (4), (5), (8). Тому, якщо задовольняються співвідношення (6)–(8), то нерівність типу (3) справедлива як для неперіодичних, так і для періодичних функцій.

Точна константа в нерівності (3) визначається співвідношенням

$$K\left(\bar{\alpha}, \bar{q}; L_{\bar{p}^0, \bar{p}^1, \dots, \bar{p}^n}^{\bar{l}}(G^n)\right) := \sup_F \frac{\|D^{\bar{\alpha}} f\|_{L_{\bar{q}}(G^n)}}{\|f\|_{L_{\bar{p}^0}(G^n)}^{\mu_0} \prod_{i=1}^n \|D^{l_i \bar{e}_i} f\|_{L_{\bar{p}^i}(G^n)}^{\mu_i}},$$

де

$$F := \left\{ f \in L_{\bar{p}^0, \bar{p}^1, \dots, \bar{p}^n}^{\bar{l}}(G^n) : \prod_{i=1}^n \|D^{l_i \bar{e}_i} f\|_{L_{\bar{p}^i}(G^n)} \neq 0 \right\}.$$

В неперіодичному випадку показники μ_i визначаються єдиним чином. В періодичному випадку нерівність (3) з такими ж показниками також можлива. У наступних двох теоремах ми вважаємо, що $K\left(\bar{\alpha}, \bar{q}; L_{\bar{p}^0, \bar{p}^1, \dots, \bar{p}^n}^{\bar{l}}(G^n)\right)$ – константа в нерівності (3) саме з цими показниками μ_i .

Теорема 3.2. Нехай $\bar{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^n$, $\bar{l} \in \mathbb{N}^n$, $\bar{q}, \bar{p}^i \in \mathbb{R}^n$, $\bar{l} < \bar{q}, \bar{p}^i < \bar{\infty}$ ($i = 0, \dots, n$), $\mu_0 \in \mathbb{R}_+^1$, $\mu_i \in \mathbb{R}_+$ ($i = 1, \dots, n$) у нерівності (3) є такими, що справедливі співвідношення (6)–(8). Тоді

$$K\left(\bar{\alpha}, \bar{q}; L_{\bar{p}^0, \bar{p}^1, \dots, \bar{p}^n}^{\bar{l}}(R^n)\right) \leq K\left(\bar{\alpha}, \bar{q}; L_{\bar{p}^0, \bar{p}^1, \dots, \bar{p}^n}^{\bar{l}}(T^n)\right).$$

Теорема 3.3. Нехай $\bar{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^n$, $\bar{l} \in \mathbb{N}^n$, $\bar{q}, \bar{p}^i \in \mathbb{R}^n$, $\bar{l} < \bar{q}, \bar{p}^i < \bar{\infty}$ ($i = 0, \dots, n$), $\mu_0 \in \mathbb{R}_+^1$, $\mu_i \in \mathbb{R}_+$ ($i = 1, \dots, n$) у нерівності (3) є такими, що виконуються умови (6), (7) та у всіх співвідношеннях (8) має місце знак рівності. Тоді

$$K\left(\bar{\alpha}, \bar{q}; L_{\bar{p}^0, \bar{p}^1, \dots, \bar{p}^n}^{\bar{l}}(R^n)\right) = K\left(\bar{\alpha}, \bar{q}; L_{\bar{p}^0, \bar{p}^1, \dots, \bar{p}^n}^{\bar{l}}(T^n)\right).$$

Результати, одержані в підрозділах 3.1 і 3.2, узагальнюють результати В.Ф.Бабенка, В.О.Кофанова та С.О. Пічугова, що стосуються функцій одного змінного.

У підрозділі 3.3 встановлюються необхідні й достатні умови існування нерівностей для функцій з простору $W_{\bar{p}^0, \bar{p}^1, \dots, \bar{p}^n}^{\bar{l}}$ і знаходиться співвідношення між точною константою в одержаній нерівності та точною константою в нерівності для періодичних функцій. Ці результати узагальнюють результати В.Ф.Бабенка та С.А.Селіванової, що стосуються функцій одного змінного.

Для заданих $x \in \mathbb{R}^n$ та $\bar{m} \in \mathbb{R}^n$, $m_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, покладемо

$$\Pi_{x, \bar{m}} = \prod_{i=1}^n [x_i - m_i, x_i + m_i].$$

Для вектора $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\bar{l} \leq \bar{p} < \bar{\infty}$, позначимо через $W_{\bar{p}}$ множину функцій $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, таких, що $f \in L_{\bar{p}}(\Pi_{x, \bar{m}})$ для всіх $\Pi_{x, \bar{m}}$ та

$$\|f\|_{W_{\bar{p}}} := \lim_{m_i \rightarrow \infty} \sup_{i=1, \dots, n} \prod_{i=1}^n (2m_i)^{-\frac{1}{p_i}} \|f\|_{L_{\bar{p}}(\Pi_{x, \bar{m}})} < \infty$$

(якщо $p_i = \infty$, то $\frac{1}{p_i} := 0$).

Позначимо через $W_{\bar{p}^i}^{m \bar{e}_i}$ множину функцій $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, таких, що похідні $D^{k \bar{e}_i} f(x_i, \xi)$, $k = 0, \dots, m-1$, локально абсолютно неперервні як функції x_i для майже всіх $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ та $D^{m \bar{e}_i} f \in W_{\bar{p}^i}$. Для вектора $\bar{l} = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ покладемо

$$W_{\bar{p}^1, \dots, \bar{p}^n}^{\bar{l}} := \bigcap_{i=1}^n W_{\bar{p}^i}^{l_i \bar{e}_i}.$$

Нехай також

$$W_{\bar{p}^0, \bar{p}^1, \dots, \bar{p}^n}^{\bar{l}} := W_{\bar{p}^0}^{\bar{l}} \cap W_{\bar{p}^1, \dots, \bar{p}^n}^{\bar{l}}.$$

Теорема 3.4. Нехай $\bar{\alpha}, \bar{l} \in \mathbb{N}^n$, $\bar{q}, \bar{p}^i \in \mathbb{R}^n$, $\bar{l} < \bar{q}, \bar{p}^i < \bar{\infty}$ ($i = 0, \dots, n$), $\mu_0 \in \mathbb{R}_+^1$, $\mu_i \in \mathbb{R}_+$ ($i = 1, \dots, n$). Для функцій $f \in W_{\bar{p}^0, \bar{p}^1, \dots, \bar{p}^n}^{\bar{l}}$ нерівність

$$\|D^{\bar{\alpha}} f\|_{W_{\bar{q}}} \leq K \|f\|_{W_{\bar{p}^0}}^{\mu_0} \prod_{i=1}^n \|D^{l_i \bar{e}_i} f\|_{W_{\bar{p}^i}}^{\mu_i} \quad (9)$$

справедлива тоді й тільки тоді, коли

$$\sum_{i=0}^n \mu_i = 1, \quad (10)$$

$$\alpha_i = \mu_j l_j - \left(\sum_{i=0}^n \frac{\mu_i}{p_j^i} - \frac{1}{q_j} \right)_+, \quad j = 1, \dots, n, \quad (11)$$

$$\sum_{i=0}^n \frac{\mu_i}{p_j^i} - \frac{1}{q_j} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Теорема 3.5. Нехай $\bar{\alpha}, \bar{l} \in \mathbb{N}^n$, $\bar{q}, \bar{p}^i \in \mathbb{R}^n$, $\bar{l} < \bar{q}, \bar{p}^i < \bar{\infty}$ ($i = 0, \dots, n$), $\mu_0 \in \mathbb{R}_+^1$, $\mu_i \in \mathbb{R}_+$ ($i = 1, \dots, n$) є такими, що виконуються умови (10)–(12). Тоді точна константа в нерівності (9) дорівнює

$$K\left(\bar{\alpha}, \bar{q}; W_{\bar{p}^0, \bar{p}^1, \dots, \bar{p}^n}^l\right) - (2\pi)^{-n} K\left(\alpha, q; L_{p^0, p^1, \dots, p^n}^l(T^n)\right),$$

$$\operatorname{de} \gamma = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{q_j} - \sum_{i=0}^n \frac{\mu_i}{p_j^i} \right).$$

Таким чином, область значень параметрів, при яких існують нерівності для періодичних функцій, задається умовами (4), (5) і розподіляється за допомогою умов (8) та (12) відповідно на області існування нерівностей для функцій з просторів $L_{\bar{p}^0, \bar{p}^1, \dots, \bar{p}^n}^l(R^n)$ та $W_{\bar{p}^0, \bar{p}^1, \dots, \bar{p}^n}^l$. При цьому в одержаних областях відповідні точні константи завжди не перевершують точну константу в нерівності для періодичних функцій.

У підрозділі 3.4 за допомогою встановленого співвідношення між точними константами одержані пові точні нерівності типу Колмогорова для функцій багатьох змінних. Наведемо одну з них.

Виходячи з нерівності для періодичних функцій, одержаної В.Ф. Бабенком, В.О. Кофановим та С.О. Пічуговим, отримуємо, що для функцій $f \in W_{\bar{p}^0, \bar{p}^1, \dots, \bar{p}^n}^l$ при

$\bar{\alpha} \in N^n$, $r \in N$, таких, що $|\bar{\alpha}| := \sum_{i=1}^n \alpha_i < r$, справедлива точна нерівність

$$\|D^{\bar{\alpha}} f\|_{W_2} \leq \frac{\|\varphi_r\|_{L_2(r)}^{\|\bar{\alpha}\|} \|f\|_{W_{\infty}}^{1-\frac{\|\bar{\alpha}\|}{r}} \prod_{i=1}^n \|D^{\alpha_i} f\|_{W_{p_i}}^{\frac{\alpha_i}{r}},$$

де φ_r – це ідеальний сплайн Ейлера, тобто r -й 2π -періодичний інтеграл з нульовим середнім значенням на періоді від функції $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$.

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена одержанню нових точних нерівностей типу Колмогорова для дробових похідних функцій однієї та декількох змінних, а також порівнянню точних констант у нерівностях, що оцінюють норму мішаної похідної функції через норму самої функції та норми її частинних похідних, для періодичних і неперіодичних функцій багатьох змінних. Основні наукові результати дисертаційної роботи полягають у наступному.

1. Для функцій, означених на всій дійсній осі, одержано точні нерівності, що оцінює L_{∞} -норму дробової похідної за Ріссом порядку $\alpha \in (0, 1)$ через L_{∞} -норми самої функції та її другої похідної. Цей результат є повною аналогією результату С.П. Гейсберга, отриманий для дробових похідних у формі Маршона порядку $\alpha \in (0, 1)$. Для функцій, заданих на всій числовій осі або напівосі, одержані точні нерівності, що оцінюють L_{∞} -норму дробової похідної у формі Маршона через L_{∞} -норми самої функції та L_{∞} -норму її першої похідної. Для функцій, заданих на обмеженому інтервалі, отримані точні поточкові оцінки дробових похідних у формі Маршона через

L_{∞} -норму функції та L_{∞} -норму її першої похідної. Одержані точні нерівності застосовано для розв'язання задачі Стечкіна найкращого наближення не обмеженого оператора дробового диференціювання обмеженими операторами на класі функцій, які задаються обмеженнями на L_{∞} -норму першої похідної функції.

2. Для функцій з гельдерових просторів отримані точні нерівності, що оцінюють L_{∞} -норму або модуль дробових похідних у формі Маршона функцій, заданих на всій числовій осі, напівосі або обмеженому інтервалі, через L_{∞} -норму та гельдерову норму самої функції. Аналогічні точні нерівності встановлені для L_{∞} -норм гіперсингулярних інтегралів з однорідною характеристикою від функцій багатьох змінних. Усі результати, одержані для гельдерових просторів, узагальнено на випадок банаховозначних функцій. Одержані точні нерівності застосовано для розв'язання задачі Стечкіна найкращого наближення необмеженого оператора дробового диференціювання (для функцій одного змінного) та не обмеженого гіперсингулярного інтегрального оператора з однорідною характеристикою (для функцій багатьох змінних) обмеженими операторами на класах функцій, які задаються мажорантою модуля неперервності.

3. Проведене порівняння точних констант в нерівностях, що оцінюють норму мішаної похідної через норму функції та норми її частинних похідних, для періодичних та неперіодичних функцій багатьох змінних. Доведено, що у випадку, коли обидві нерівності існують, точна константа в нерівності для неперіодичних функцій не перевершує точної константи в нерівності для періодичних функцій. Вказані умови, за яких ці точні константи співпадають. Ці результати узагальнюють результати В.Ф. Бабенка, В.О. Кофанова та С.О. Пічугова, які стосуються функцій одного змінного.

4. Встановлені необхідні й достатні умови існування нерівностей для „пряміжних” похідних функцій багатьох змінних у W_p -просторах та знайдено залежність між точними константами в таких нерівностях і точними константами в аналогічних нерівностях для періодичних функцій. Ці результати узагальнюють результати В.Ф. Бабенка і С.А. Селіванової, які стосуються функцій одного змінного. За допомогою одержаного співвідношення між точними константами встановлені повні точні нерівності для функцій багатьох змінних.

Користуючись нагодою, висловлюю щирю вдячність моєму науковому керівникові професору Бабенку Владиславу Федоровичу за увагу, яку він приділяв цій роботі, корисні поради та допомогу.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах:

1. Бабенко В.Ф., Чурілова М.Г. Про нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку. Вісник Дніпропетровського ун-ту. Математика. – 2001. – Вип. 6. – С. 16–20.
2. Babenko V.F., Churilova M.G. On the Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives. Ukr. Math. J. – 2002. – 8, № 4. – P. 437–446.

3. Бабенко В.Ф., Чурилова М.С. О неравенствах типа Колмогорова для дробных производных в многомерном случае// Вісник Дніпропетровського ун-ту. Математика. – 2003. – Вип. 8. – С. 26–30.
4. Babenko V.F., Churilova M.S. Comparison of sharp constants in inequalities for derivatives of periodic and non-periodic multivariate functions// East J. Approx. – 2005. – 11, № 4. – P. 405–435.
5. Чурилова М.С. О неравенствах типа Ландау–Колмогорова для дробных производных на отрезке// Вісник Дніпропетровського ун-ту. Математика. – 2005. – Вип. 10. – С. 127–134.
6. Бабенко В.Ф., Чурилова М.С. Сравнение точных констант в неравенствах типа Колмогорова для периодических и непериодических функций многих переменных// Укр. мат. журн. – 2006. – 58, № 5. – С. 597–606.
7. Чурилова М.С. О неравенствах для дробных производных банаховозначных функций из гильбертовых пространств// Вісник Дніпропетровського ун-ту. Математика. – 2006. – Вип. 11. – С. 120–127.
8. Churilova M.S. Comparison of the best constants in Kolmogorov type inequalities for multivariate functions// Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатка. Тези доповідей. – Львів, 2004. – С. 226.

АНОТАЦІЇ

Чурилова М.С. Нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку та їх застосування в теорії апроксимації. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. Дніпропетровський національний університет, Дніпропетровськ, 2006.

Дисертація присвячена дослідженню задачі про точні нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку функцій однієї та багатьох змінних, а також порівнянню точних констант у нерівностях, що оцінюють норму мішаної похідної функції через норму самої функції та норми її частинних похідних для періодичних і неперіодичних функцій багатьох змінних.

Одержано нові точні нерівності, що оцінюють L_∞ -норму або модуль дробової похідної функції, заданої на всій числовій осі, напівосі або обмеженому інтервалі, через L_∞ -норму самої функції та її гильбертову норму або L_2 -норму її першої похідної. Для функцій багатьох змінних отримані точні нерівності, що оцінюють L_∞ -норму гіперсингулярного інтеграла з однорідною характеристикою через L_∞ -норму та гильбертову норму функції. Результати, отримані для функцій з гильбертових просторів, узагальнено на випадок банаховозначних функцій. Одержані результати застосовано до розв'язку задачі Стечкина апроксимації неограниченого оператора дробового диференціювання обмеженими операторами на класах функцій, які задаються мажорантою модуля неперервності або обмеженнями на L_2 -норму першої похідної функції (для функцій одного змінного), а також до розв'язку такої задачі для неограниченого гіперсингулярного інтегрального оператора з

однорідною характеристикою на класах функцій, які задаються мажорантою модуля неперервності (для функцій багатьох змінних).

Знайдено співвідношення між точними константами в нерівностях для „проміжних” похідних періодичних та неперіодичних функцій багатьох змінних. Одержано необхідні й достатні умови існування нерівностей для „проміжних” похідних функцій у W_p -просторах та встановлено залежність між точною константою в одержаній нерівності та точною константою в нерівності для періодичних функцій. За допомогою одержаних співвідношень отримано нові точні нерівності типу Колмогорова для функцій багатьох змінних.

Ключові слова: дробова похідна, нерівність типу Колмогорова, гильбертові простір, точна константа, екстремальна функція.

Чурилова М.С. Неравенства типа Колмогорова для производных дробного порядка и их приложения в теории аппроксимации. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ. Днепропетровский национальный университет, Днепропетровск, 2006.

Диссертация посвящена исследованию задачи о точных неравенствах типа Колмогорова для производных дробного порядка функций одной и многих переменных, а также сравнению точных констант в неравенствах, оценивающих норму смешанной производной через норму самой функции и нормы ее частных производных, для периодических и непериодических функций многих переменных.

Для функций, заданных на всей действительной оси, получено точное неравенство, оценивающее L_∞ -норму дробной производной Рисса порядка $\alpha \in (0; 2]$ через L_∞ -нормы самой функции и ее второй производной. Этот результат дополняет известный результат С.П. Гейсберга, полученный для дробных производных в форме Маршю порядка $\alpha \in (0; 1)$. Для функций, определенных на всей числовой оси или полуоси, получены точные неравенства, оценивающие L_∞ -норму дробной производной в форме Маршю через L_∞ -норму самой функции и L_2 -норму ее первой производной. Для функций, определенных на ограниченном интервале, получены точные поточечные оценки дробных производных в форме Маршю через L_∞ -норму функции и L_2 -норму ее первой производной.

Для функций из гильбертовых пространств получены точные неравенства, оценивающие L_∞ -норму или модуль дробных производных в форме Маршю функций, заданных на всей действительной оси, полуоси или ограниченном интервале, через L_∞ -норму и гильбертову норму самой функции. Аналогичные точные неравенства получены для L_∞ -норм гиперсингулярных интегралов с однородной характеристикой от функций многих переменных. Все результаты, полученные для функций из гильбертовых пространств, обобщены на случай банаховозначных функций.

Полученные результаты применены к решению задачи С.Б. Стечкина аппроксимации неограниченного оператора дробного дифференцирования ограниченными операторами на классах функций, которые задаются мажорантой модуля

непрерывности или ограничениями на L_∞ -норму первой производной функции (для функций одной переменной), а также к решению такой задачи для гиперсингулярного интегрального оператора с однородной характеристикой на классах функций, которые задаются мажорантой модуля непрерывности (для функций многих переменных).

Проведено сравнение точных констант в неравенствах, оценивающих норму смешанной производной через норму самой функции и нормы ее частных производных, для периодических и непериодических функций многих переменных. Доказано, что в случае, когда оба неравенства возможны, точная константа в неравенстве для функций, заданных на всем пространстве R^n , не превосходит точной константы в неравенстве для функций, периодических по каждой переменной. Указаны также условия, при которых эти точные константы совпадают. Эти результаты обобщают результаты В.Ф. Бабенко, В.А. Кофанова и С.А. Пичугова, полученные для функций одного переменного.

Установлены необходимые и достаточные условия существования неравенств для «промежуточных» производных функций многих переменных в W_p^r -пространствах и найдена зависимость между точными константами в таких неравенствах и точными константами в аналогичных неравенствах для периодических функций. Эти результаты обобщают результаты В.Ф. Бабенко и С.А. Селивановой, полученные для функций одного переменного. С помощью найденного соотношения получены новые точные неравенства типа Колмогорова для функций многих переменных.

Ключевые слова: дробная производная, неравенство типа Колмогорова, гильбертово пространство, точная константа, экстремальная функция.

Churilova M.S. Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives and their applications in approximation theory. – Manuscript.

Thesis for candidate degree in Physics and Mathematics speciality 01.01.01 – mathematical analysis. Dnepropetrovsk National University, Dnepropetrovsk, 2006.

The thesis is devoted to the research of sharp Kolmogorov type inequalities problem for fractional derivatives of univariate and multivariate functions and to comparison of sharp constants in the inequalities, which estimate the norm of the mixed derivative in terms of the norm of the function and the norms of its partial derivatives, for periodic and non-periodic multivariate functions.

New sharp inequalities estimating L_∞ -norm or absolute value of the fractional derivative of the function, defined on the whole real line, on the half-line, or on the bounded interval, in terms of L_p -norm of the function itself and its Holder norm or L_∞ -norm of its higher derivative are obtained. For multivariate functions sharp inequalities estimating L_∞ -norm of the hypersingular integral with homogeneous characteristic in terms of L_p -norm and Holder norm of the function are obtained. Inequalities established for the functions from Holder spaces are generalized for the case of Banach-valued functions. Obtained results are applied to solving Stechkin problem of approximating of unbounded fractional differentiating operator by bounded operators on functional classes defined by majorant of continuity module or by restrictions to L_∞ -norm of the first

derivative of the function (for univariate functions) and to solving such a problem for unbounded hypersingular integral operator on functional classes defined by majorant of continuity module (for multivariate functions).

Relations between sharp constants in inequalities for „intermediate” derivatives of periodic and non-periodic multivariate functions are found. Necessary and sufficient existence conditions of inequalities for „intermediate” derivatives of the functions in W_p^r -spaces are obtained and relation between the sharp constant in obtained inequality and the sharp constant in inequality for periodic functions is established. With the help of obtained relations new sharp Kolmogorov type inequalities for multivariate functions are established.

Key words: fractional derivative, Kolmogorov type inequality, Holder space, sharp constant, extremal function.

Підписано до друку 27.12.06. Формат 60×90/16.

Непр. друкарський. Друк плоский. Шрифт Times New Roman Cyr.

Умов. друк. арк. 1. Тираж 100 прим. Замовлення № 221

49050, м. Дніпропетровськ- 50, вул. Наукова, 5

Друкарня ДНУ