1.2. Представлення основних компонент НДС для анізотропного біматеріального простору

У загальному випадку анізотропного матеріалу, напруження зв`язані з пружними переміщеннями за допомогою рівнянь [14]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \tag{1.1}$$

де $i, j, k, l = 1, 2, 3$,

причому пружні модулі мають наступні властивості симетрії:

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk}, \tag{1.2}$$

і вважається справедливим правило сумування по індексам, що повторюються.

При відсутності масових сил, підставляючи (1.1) в рівняння рівноваги одержуємо рівняння Ляме у вигляді:

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_j} = 0. \tag{1.3}$$

Будемо розглядати такий вид напружено-деформівного стану (НДС), для якого вектор компонент переміщень u_k не залежить від координати x_3. Частковим випадком такого стану є, зокрема, плоска деформація. У цьому випадку, справедливі наступні представлення для компонент вектора переміщень:

$$u_k = a_k f(x + py), \tag{1.4}$$

де p - деяке значення, а a_1, a_2, a_3 - компоненти деякого вектора, що підлягають визначенню; f - довільна аналітична функція комплексної змінної $z = x + py$, $x = x_1$, $y = x_2$. Далі виконуючи підстановку рівняння (1.4) у рівняння (1.3), отримуємо наступну однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\left[C_{i1k1} + p\left(C_{i1k2} + C_{i2k1}\right) + p^2 C_{i2k2}\right] a_k = 0, \tag{1.5}$$

де $i, k = 1, 2, 3$.

Введемо матриці $\boldsymbol{K} = \left[K_{ik}\right]$, $\boldsymbol{R} = \left[R_{ik}\right]$, $\boldsymbol{I} = \left[I_{ik}\right]$, де $K_{ik} = C_{i1k1}$, $R_{ik} = C_{i1k2}$, $T_{ik} = C_{i2k2}$, а також введемо вектор $\boldsymbol{a}^T = [a_1, a_2, a_3]$. Тоді рівняння (1.5) може бути переписано у матричній формі:

$$\left[\boldsymbol{K} + p\left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}^T\right) + p^2 \boldsymbol{T}\right] \boldsymbol{a} = 0. \tag{1.6}$$

Тут та далі, верхній індекс "$\boldsymbol{T}$" означає транспоновану матрицю. Нетривіальне рішення рівняння (1.6) існує, коли має місце рівняння:

$$det\left[\boldsymbol{K} + p\left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}^T\right) + p^2 \boldsymbol{T}\right] = 0. \tag{1.7}$$

Як було доведено у [91], матриці $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{T}$ – симетричні та додатньо визначені, а рівняння (1.7) має уявні корені, якщо енергія деформації позитивна.

Три корені рівняння (1.7) з додатними уявними частинами будемо позначати як p_α, а загальний розв'язок рівняння (1.3) може бути представлений у вигляді:

1.2. Представлення основних компонент НДС для анізотропного біматеріального простору

У загальному випадку анізотропного матеріалу, напруження зв'язані з пружними переміщеннями за допомогою рівнянь [14]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \tag{1.1}$$

де $i, j, k, l = 1, 2, 3$,

причому пружні модулі мають наступні властивості симетрії:

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk}, \tag{1.2}$$

і вважається справедливим правило сумування по індексам, що повторюються.

При відсутності масових сил, підставляючи (1.1) в рівняння рівноваги одержуємо рівняння Ляме у вигляді:

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_j} = 0. \tag{1.3}$$

Будемо розглядати такий вид напружено-деформівного стану (НДС), для якого вектор компонент переміщень u_k не залежить від координати x_3. Частковим випадком такого стану є, зокрема, плоска деформація. У цьому випадку, справедливі наступні представлення для компонент вектора переміщень:

$$u_k = a_k f(x + py), \tag{1.4}$$

$$u_k = \sum_{\alpha=1}^{3}\left[a_{k\alpha} f_\alpha(z_\alpha) + \bar{a}_{k\alpha}\bar{f}_\alpha(\bar{z}_\alpha)\right], \tag{1.8}$$

де $z_\alpha = x + p_\alpha y$, символ з рискою означає комплексне спряження.

Зрозуміло, що p_α і вектор $a_\alpha = \left[a_{1\alpha}, a_{2\alpha}, a_{3\alpha}\right]$ є власні значення і відповідні власні вектори системи (1.6).

Підставляючи (1.8) у рівняння (1.1), маємо:

$$\sigma_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{3}\left[\chi_{ij\alpha} f'_\alpha(z_\alpha) + \bar{\chi}_{ij\alpha}\bar{f}'_\alpha(\bar{z}_\alpha)\right], \tag{1.9}$$

де $\chi_{ij\alpha} = \left(C_{ijk1} + p_\alpha C_{ijk2}\right)a_{k\alpha}$, верхній штрих позначає похідну по z_α.

Введемо наступні вектори:

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \ \boldsymbol{t} = \begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \end{Bmatrix}, \ \boldsymbol{f}(z) = \begin{Bmatrix} f_1(z_1) \\ f_2(z_2) \\ f_3(z_3) \end{Bmatrix},$$

та матриці:

$$\boldsymbol{A} = [a_{k\alpha}], \ \boldsymbol{B} = [\chi_{i2\alpha}], \tag{1.10}$$

де $i, k, \alpha = 1, 2, 3$.

Співвідношення (1.8) та найбільш важлива частина співвідношень (1.9) може бути записана в матричній формі:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(z) + \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{f}}(\bar{z}), \tag{1.11}$$

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}'(z) + \bar{\boldsymbol{B}}\bar{\boldsymbol{f}}'(\bar{z}). \tag{1.12}$$

Розглянемо тепер композитний матеріал складений з двох анізотропних півпросторів $y>0$ та $y<0$ з пружними константами $C_{ijkl}^{(1)}$ і $C_{ijkl}^{(2)}$ відповідно. Поперечний переріз ортогональний до осі x_3 зображено на рис. 1.1.

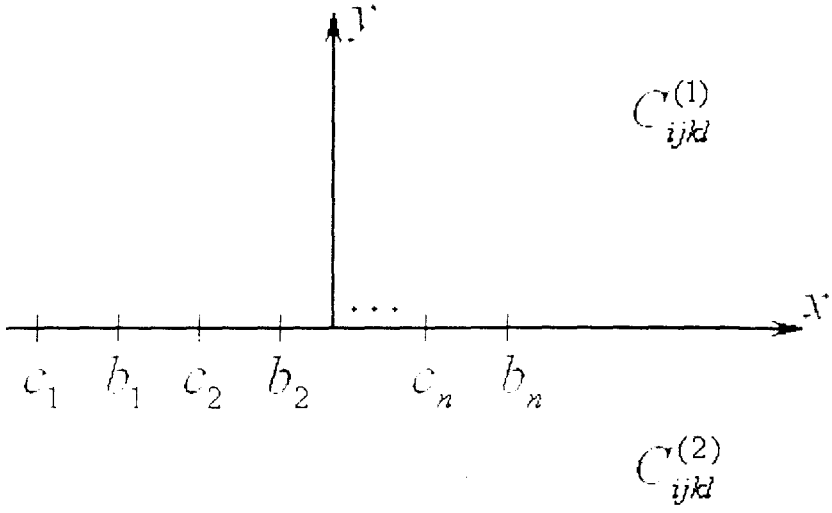

Рис. 1.1

Будемо вважати, що напруження неперервні вздовж усього інтерфейсу:

$$\boldsymbol{t}^{(1)}(x,0)=\boldsymbol{t}^{(2)}(x,0) \text{ для } x\in(-\infty;\infty). \tag{1.13}$$

Крім того приймемо, що частина $\tilde{L}=\{(-\infty;c_1)\cup(b_1;c_2)\cup\ldots(b_n;\infty)\}$ інтерфейсу $-\infty<x<\infty,\ y=0$ являє собою ділянки жорсткого зчеплення. Тобто, додатково до (1.13) повинні виконуватися умови:

$$\boldsymbol{u}^{(1)}(x,0)=\boldsymbol{u}^{(2)}(x,0) \text{ для } x\in\tilde{L}. \tag{1.14}$$

У цьому випадку для кожної області, відповідно до (1.11), (1.12), співвідношення з (1.3) можуть бути записані так:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^{(j)}(x,y)&=\boldsymbol{A}^{(j)}\boldsymbol{f}^{(j)}(z)+\overline{\boldsymbol{A}}^{(j)}\overline{\boldsymbol{f}}^{(j)}(\overline{z}),\\ \boldsymbol{t}^{(j)}(x,y)&=\boldsymbol{B}^{(j)}\boldsymbol{f}'^{(j)}(z)+\overline{\boldsymbol{B}}^{(j)}\overline{\boldsymbol{f}}'^{(j)}(\overline{z}),\end{aligned} \tag{1.15}$$

:orN3Lr1 `IHdKL1cJHHO OH THHOm0H17IHH1H0 X i1Hd.LLW om

`HhO1j' H0X dg IU `0H017HHLHf. KHHahLH£ OHOLLH OM `H.ILHc Or HhOILWHHdI

(L1*1)

'O> d (o) = z) |) |g - (z)(z),f (z) .9

`0 < ~ `(o)' (7)if(1),J(,)g

:OW3LW (91 ˙ 1) KHHOmOHVIHHIHO

£ ~YAIOI `IH14MOIfII HIM n 0HHL170HLduz) (o) K _ (Z) y1 KHH2rOHt!HHIH,)

'do1NOH HHHHLLOOLI HIlHgIITHOt - 017

`Isu00 = (o) W = (Z) K

:Ow:Lm (S I'i) K

-HKHHTd £ `ILOOHHOhHI`I00H LH IH0M(0W90 KHHaWAdLILH 0171 `HhoTLWHHdJ_I

THHITIOLH HILIt1 iC H1HhH.LTIfLHL (Z)JV IlT7~1

-HrccJ HDIKO1 `OHVTHOI11'IH ' 0 >,t 1 L 0 < d KLr1 IHH[d HHOH 01001 `iHHTIIOITH HIIIIII

H IH0wHo110du OHhHIILLHL it-L10 g1.iC>KOW TT11MHJ) IH1T iioo oM `:)X£L-oii (91 ')

KHH0ITTOHMHHTIID OHT i 10iJi IB ' O>,f LL O < ;f K1.OLLOO IITI?TH,A(11) IOHhI1.1,

-ii1HL IIIKHHOhLH£ WHHh1iHLd1 3 (91) KHHKHHTd HHH.LOLh Pgrdii 13,1, LHII

(91 1) (D,- >x>cc- '(- J [l] 9 - (~)(z)~T (Z)g = -1 9 -

1HOWX /cHhHHLds LJ. '(c 1' 1) £ KHHOMOH1IHHTHO Oi1Cd17 Hh01AH0.LOHd0?II1q

'OH1THOIIVIH `XLHHITIOIfHHTH (0 > d) HIH?KHH 721 (0 <d) I1THXdOH X ⌈HhHlllf1HL'

(z) (z j III (Z) (') f u1TxH,Cq)-doLxOH `. 0 > d KLL7 Z = f al, 0 <,f KLr' | f 011

/Z

де $j=1$ для $y>0$ та $j=2$ для $y<0$; вектор-функції $\boldsymbol{f}^{(1)}(z)$ та $\boldsymbol{f}^{(2)}(z)$ - аналітичні у верхній ($y>0$) та нижній ($y<0$) півплощинах, відповідно.

Використовуючи друге співвідношення з (1.15), та граничну умову (1.13), маємо:

$$\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{f}'^{(1)}(x)-\overline{\boldsymbol{B}}^{(2)}\overline{\boldsymbol{f}}'^{(2)}(x)=\boldsymbol{B}^{(2)}\boldsymbol{f}'^{(2)}(x)-\overline{\boldsymbol{B}}^{(1)}\overline{\boldsymbol{f}}'^{(1)}(x),\quad -\infty<x<\infty. \quad (1.16)$$

Ліва та права частини рівняння (1.16) є граничним значенням аналітичної функції у областях $y>0$ та $y<0$, відповідно. Співвідношення (1.16) показує, що обидві функції можуть бути аналітично продовжені в цілій площині, тобто вони рівні для $y>0$ та $y<0$, відповідно, деякій функції $\boldsymbol{M}(z)$ аналітичній у цілій площині.

Приймаючи, що напруження обмежені на нескінченності, з рівняння (1.15) маємо:

$$\boldsymbol{M}(z)\big|_{z\to\infty}=\boldsymbol{M}^{(0)}=const,$$

де $\boldsymbol{M}^{(0)}$ - довільний постійний вектор.

Співвідношення $\boldsymbol{M}(z)=\boldsymbol{M}^{(0)}$ справедливе у всій площині, тому з співвідношення (1.16) маємо:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{f}'^{(1)}(z)-\overline{\boldsymbol{B}}^{(2)}\overline{\boldsymbol{f}}'^{(2)}(\overline{z})=\boldsymbol{M}^{(0)},\ \ y>0,\\&\boldsymbol{B}^{(2)}\boldsymbol{f}'^{(2)}(z)-\overline{\boldsymbol{B}}^{(1)}\overline{\boldsymbol{f}}'^{(1)}(\overline{z})=\boldsymbol{M}^{(0)},\ \ y<0.\end{aligned} \quad (1.17)$$

Приймаючи до уваги, що власне значення знайдене, та враховуючи, що матриці у співвідношенні (1.17) не сингулярні, маємо:

$$\bar{f}'^{(2)}(\bar{z}) = \left(\bar{B}^{(2)}\right)^{-1} B^{(1)} f'^{(1)}(z) - \left(\bar{B}^{(2)}\right)^{-1} M^{(0)}, y > 0,$$
$$\bar{f}'^{(1)}(\bar{z}) = \left(\bar{B}^{(1)}\right)^{-1} B^{(2)} f'^{(2)}(z) - \left(\bar{B}^{(1)}\right)^{-1} M^{(0)}, y < 0. \quad (1.18)$$

Оскільки $f'^{(1)}(z)$ і $f'^{(2)}(z)$ довільні функції, то вибираючи $M^{(0)} = 0$, одержуємо рівняння (1.18) у вигляді:

$$\bar{f}'^{(2)}(\bar{z}) = \left(\bar{B}^{(2)}\right)^{-1} B^{(1)} f'^{(1)}(z), y > 0,$$
$$\bar{f}'^{(1)}(\bar{z}) = \left(\bar{B}^{(1)}\right)^{-1} B^{(2)} f'^{(2)}(z), y < 0. \quad (1.19)$$

Вводячи вектор:

$$\left[u'(x)\right] = u'^{(1)}(x,0) - u'^{(2)}(x,0), \quad (1.20)$$

та приймаючи до уваги співвідношення (1.15) та (1.19), похідна від стрибка переміщень через інтерфейс може бути записана як:

$$\left[u'(x)\right] = Df'^{(1)}(x) + \bar{D}\bar{f}'^{(1)}(x), \quad (1.21)$$

де $D = A^{(1)} - \bar{A}^{(2)}\left(\bar{B}^{(2)}\right)^{-1} B^{(1)}$. (1.22)

Тоді на основі другого з співвідношень (1.15), вектор $t^{(1)}$ на міжфазній границі може бути записаний як:

$$t^{(1)}(x,0) = B^{(1)} f'^{(1)}(x) + \bar{B}^{(1)} \bar{f}'^{(1)}(x). \quad (1.23)$$

Введемо вектор-функцію $W(z)$ за формулою:

$$\bar{f}'^{(2)}(\bar{z}) = \left(\bar{B}^{(2)}\right)^{-1} B^{(1)} f'^{(1)}(z) - \left(\bar{B}^{(2)}\right)^{-1} M^{(0)}, y > 0,$$
$$\bar{f}'^{(1)}(\bar{z}) = \left(\bar{B}^{(1)}\right)^{-1} B^{(2)} f'^{(2)}(z) - \left(\bar{B}^{(1)}\right)^{-1} M^{(0)}, y < 0. \quad (1.18)$$

Оскільки $f'^{(1)}(z)$ і $f'^{(2)}(z)$ довільні функції, то вибираючи $M^{(0)} = 0$, одержуємо рівняння (1.18) у вигляді:

$$\bar{f}'^{(2)}(\bar{z}) = \left(\bar{B}^{(2)}\right)^{-1} B^{(1)} f'^{(1)}(z), y > 0,$$
$$\bar{f}'^{(1)}(\bar{z}) = \left(\bar{B}^{(1)}\right)^{-1} B^{(2)} f'^{(2)}(z), y < 0. \quad (1.19)$$

Вводячи вектор:

$$\left[u'(x)\right] = u'^{(1)}(x,0) - u'^{(2)}(x,0), \quad (1.20)$$

та приймаючи до уваги співвідношення (1.15) та (1.19), похідна від стрибка переміщень через інтерфейс може бути записана як:

$$\left[u'(x)\right] = Df'^{(1)}(x) + \bar{D}\bar{f}'^{(1)}(x), \quad (1.21)$$

де $D = A^{(1)} - \bar{A}^{(2)}\left(\bar{B}^{(2)}\right)^{-1} B^{(1)}$. (1.22)

Тоді на основі другого з співвідношень (1.15), вектор $t^{(1)}$ на міжфазній границі може бути записаний як:

$$t^{(1)}(x,0) = B^{(1)} f'^{(1)}(x) + \bar{B}^{(1)} \bar{f}'^{(1)}(x). \quad (1.23)$$

Введемо вектор-функцію $W(z)$ за формулою:

$$W(z)=\begin{cases} \boldsymbol{DE}(z), y>0, \\ -\bar{\boldsymbol{D}}\bar{\boldsymbol{E}}(z), y<0, \end{cases} \tag{1.24}$$

де $\boldsymbol{E}^T(z)=\left[f_1'^{(1)}(z), f_2'^{(1)}(z), f_3'^{(1)}(z)\right]$,

тоді з виразів (1.21) та (1.23) отримаємо такі формули для похідної від стрибка переміщень та вектора напружень:

$$\left[\boldsymbol{u}'(x)\right]=\boldsymbol{W}^+(x)-\boldsymbol{W}^-(x), \tag{1.25}$$

$$\boldsymbol{t}^{(1)}(x,0)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{W}^+(x)-\bar{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{W}^-(x), \tag{1.26}$$

де $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{D}^{-1}$, (1.27)

$$\boldsymbol{W}^+(x)=\boldsymbol{W}(x+i0),\ \boldsymbol{W}^-(x)=\boldsymbol{W}(x-i0).$$

Зі співвідношень (1.25) випливає, що вектор-функція $\boldsymbol{W}(z)$ аналітична у кожній півплощині включаючи зчеплені ділянки інтерфейсу $\tilde{L}$.

Представлення (1.25), (1.26) є зручними для розв'язання різних задач для анізотропних біматеріалів шляхом зведення їх до задач лінійного спряження Гілберта чи Діріхле – Рімана.

Далі будемо розглядати ортотропні матеріали як найбільш важливий клас анізотропних матеріалів.

У цьому випадку, використовуючи загально прийняту систему позначень для пружного тензора $\boldsymbol{C}$ четвертого порядку [11], маємо $C_{1111}=C_{11}$, $C_{2222}=C_{22}$, $C_{3333}=C_{33}$, $C_{1122}=C_{12}$, $C_{1133}=C_{13}$, $C_{2233}=C_{23}$, $C_{1212}=C_{66}$, $C_{1313}=C_{55}$, $C_{2323}=C_{44}$, причому інші компоненти тензору $\boldsymbol{C}$ дорівнюють нулю.

Матриці $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{T}$ мають вигляд:

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} 0 & C_{12} & 0 \\ C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}. \qquad (1.28)$$

Тоді співвідношення (1.7) прийме вигляд:

$$\left[\left(C_{11}+p^2C_{22}\right)\left(C_{66}+p^2C_{22}\right)-\left(C_{12}+C_{66}\right)p^2\right]\left(C_{55}+p^2C_{44}\right)=0. \qquad (1.29)$$

Як показує аналіз, корені цього рівняння для ортотропних матеріалів – уявні. Позначимо частину цих коренів з додатною уявною частиною як

$p_1=i\omega_1, p_2=i\omega_2, p_3=i\omega_3$, де ω_k $(k=1,2)$ – дійсні, а $\omega_3=\sqrt{\dfrac{C_{55}}{C_{44}}}$.

Підставляючи (1.28) у рівняння (1.6), приходимо до наступної матриці $\boldsymbol{A}$, сформованої з компонент A_{i1}, A_{i2}, A_{i3} власних векторів:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} h_1 & ih_2 & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ h_j=\frac{\omega_j(C_{12}+C_{66})}{C_{11}-\omega_j^2C_{66}}. \qquad (1.30)$$

Матриця ж $\boldsymbol{B}$ має вигляд:

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} iC_{66}(h_1\omega_1-h_2) & C_{66}(1-\omega_2) & 0 \\ h_1C_{12}+h_2\omega_1C_{22} & i(C_{12}+\omega_2C_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & i\omega_3A_{66} \end{bmatrix}. \qquad (1.31)$$

Використовуючи різні матеріали для $y>0$ та $y<0$, бачимо, що матриця $\boldsymbol{G}$ має наступні властивості:

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} ig_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & ig_{22} & 0 \\ 0 & 0 & ig_{33} \end{bmatrix}, \tag{1.32}$$

де елементи матриці $\boldsymbol{G}$ можуть бути знайдені через $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ за допомогою звичайних матричних операцій на основі формул (1.22) і (1.27).

Чисельний аналіз показав, що якщо корені p_k – уявні, то коефіцієнти g_{ij} – дійсні.

Далі перетворимо співвідношення (1.25), (1.26). Введемо нову, аналітичну у кожній у кожній півплощині вектор-функцію $\boldsymbol{\Psi}(z)$ за правилом:

$$\boldsymbol{\Psi}(z)=\begin{cases} \boldsymbol{G}\boldsymbol{W}(z), \ y>0 \\ \bar{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{W}(z), \ y<0 \end{cases}.$$

Звідси можемо знайти $W(z)$:

$$\boldsymbol{W}(z)=\begin{cases} \boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{\Psi}(z), \ y>0 \\ \bar{\boldsymbol{G}}^{-1}\boldsymbol{\Psi}(z), \ y<0 \end{cases}. \tag{1.33}$$

Враховуючи вираз (1.33), співвідношення (1.25), (1.26) можуть бути записані у вигляді:

$$\left[\boldsymbol{u}'(x)\right]=\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{\Psi}^{+}(x)-\bar{\boldsymbol{G}}^{-1}\boldsymbol{\Psi}^{-}(x), \tag{1.34}$$

$$\boldsymbol{t}^{(1)}(x,0)=\boldsymbol{\Psi}^{+}(x)-\boldsymbol{\Psi}^{-}(x). \tag{1.35}$$

Введемо позначення: $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{G}^{-1} = \begin{bmatrix} iq_{11} & q_{12} & 0 \\ q_{21} & iq_{22} & 0 \\ 0 & 0 & iq_{33} \end{bmatrix}$, тоді співвідношення (1.34) можна записати таким чином:

$$\left[\boldsymbol{u}'(x)\right] = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Psi}^{+}(x) - \bar{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{\Psi}^{-}(x). \tag{1.36}$$

Введена таким чином функція $\boldsymbol{\Psi}(z)$ аналітична у кожній півплощині, а також на тих відкритих ділянках лінії поділу матеріалів, на яких навантаження відсутні.

Співвідношення (1.35), (1.36) досить зручні для формулювання задач лінійного спряження при конкретних умовах на інтерфейсі, зокрема для зовнішніх тріщин.

1.3. Постановка задачі та аналіз класичної моделі

Нехай два масивних ортотропних тіла зчеплені на ділянці $c < x < a$, $y = 0$, а на іншій частині інтерфейсу $x < c$, $y = 0$ та $x > a$, $y = 0$ мають місце дві крайові тріщини (рис. 1.2). Вважається, що розмір тіла набагато більший, ніж довжина ділянки зчеплення $[c, a]$ і величини d та h. Тоді ефекти, які мають місце в околі вершин тріщин будуть практично співпадати з тими, які мають місце для випадку, коли границі тіла прямують до нескінченності. Тому в подальшому будемо вважати тіла нескінченними.

Вважаємо також, що в точці $x = d$, $y = 0$ берегів правої тріщини діють зосереджені сили (P_1, P_2), а на ліву тріщину сила P_2', які не змінюються вздовж координати x_3. Тоді має місце плоска деформація в площині (x, y).

Вважаючи $h << a - c$, одержуємо, що вплив лівої тріщини та її навантаження на ефекти, котрі виникають біля вершини правої тріщини, буде незначним. Тому в подальшому основну увагу будемо зосереджувати на правій тріщині та при її дослідженні звертати увагу тільки на сили, прикладені на неї. При необхідності аналогічний аналіз може бути проведений і для лівої тріщини.

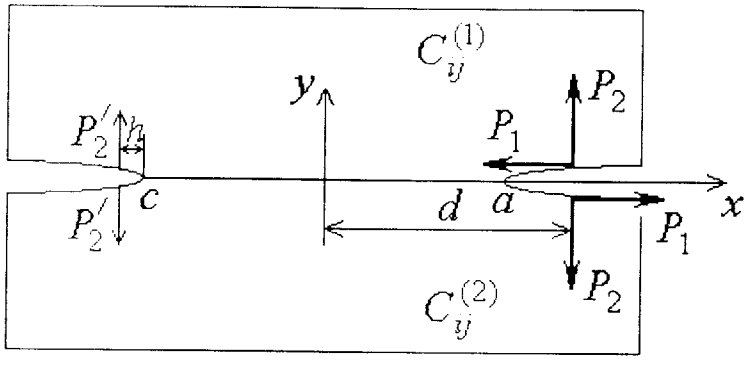

Рис. 1.2

Умови на інтерфейсі для поставленої задачі (без врахування навантаження на ліву тріщину) мають вигляд:

$$u^{+}=u^{-},\ v^{+}=v^{-},\ \sigma_{12}^{+}=\sigma_{12}^{-},\ \sigma_{22}^{+}=\sigma_{22}^{-},\ x\in(c,a), \tag{1.37}$$

$$\sigma_{12}^{\pm}=P_1\delta(x-d),\ \sigma_{22}^{\pm}=-P_2\delta(x-d),\ x\notin(c,a), \tag{1.38}$$

і є частковим випадком умов, розглянутих у попередньому параграфі.

Виходячи з рівнянь (1.35), (1.36) і враховуючи вид матриці $\boldsymbol{Q}$, для компонент плоско-деформованого стану маємо:

$$\begin{aligned}\sigma_{12}^{(1)}(x,0)&=\psi_1^{+}(x)-\psi_1^{-}(x),\\ \sigma_{22}^{(1)}(x,0)&=\psi_2^{+}(x)-\psi_2^{-}(x),\end{aligned} \tag{1.39}$$

$$\begin{aligned}[u^{(1)}(x)]&=iq_{11}\psi_1^{+}(x)+q_{12}\psi_2^{+}(x)+iq_{11}\psi_1^{-}(x)-q_{12}\psi_2^{-}(x),\\ [v^{(1)}(x)]&=q_{21}\psi_1^{+}(x)+iq_{22}\psi_2^{+}(x)-q_{21}\psi_1^{-}(x)+iq_{22}\psi_2^{-}(x).\end{aligned} \tag{1.40}$$

Комбінуючи рівняння (1.40), одержуємо:

$$\begin{aligned}[v^{(1)}(x)]+im[u^{(1)}(x)]=&(q_{21}-mq_{11})\psi_1^{+}(x)+i(q_{22}+mq_{12})\psi_2^{+}(x)-\\ &-(q_{21}+mq_{11})\psi_1^{-}(x)+i(q_{22}-mq_{12})\psi_2^{-}(x).\end{aligned}$$

Вводячи позначення:

$$F(z)=\psi_1(z)+iS\psi_2(z),\ S=\frac{q_{22}+mq_{12}}{q_{21}-mq_{11}}, \tag{1.41}$$

останній вираз можна записати у вигляді:

$$[v^{(1)}(x)]+im[u^{(1)}(x)]=(q_{21}-mq_{11})F^{+}(x)-(q_{21}+mq_{11})F^{-}(x). \tag{1.42}$$

Позначаючи далі: $\vartheta = q_{21} - mq_{11}$, $\gamma = -\dfrac{q_{21} + mq_{11}}{\vartheta}$, запишемо співвідношення (1.42) у вигляді:

$$[v^{(1)}(x)] + im[u^{(1)}(x)] = \vartheta\left[F^{+}(x) + \gamma F^{-}(x)\right]. \qquad (1.43)$$

При цьому m - це корені рівняння: $\dfrac{q_{22} + mq_{12}}{q_{21} - mq_{11}} = \dfrac{mq_{12} - q_{22}}{q_{21} + mq_{11}}$, розв'язок якого має вигляд:

$$m_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{q_{21}q_{22}}{q_{11}q_{12}}}. \qquad (1.44)$$

Підставляючи (1.44) в другу формулу (1.41) одержуємо:

$$S_{1,2} = -m_{1,2} \qquad (1.45)$$

По аналогії з переміщеннями, робимо перетворення для напружень, виходячи з співвідношень (1.39):

$$\sigma_{12}^{(1)}(x,0) + iS\sigma_{22}^{(1)}(x,0) = \psi_1^{+}(x) + iS\psi_2^{+}(x) - \left(\psi_1^{-}(x) + iS\psi_2^{-}(x)\right), \qquad (1.46)$$

або $\sigma_{12}^{(1)}(x,0) + iS\sigma_{22}^{(1)}(x,0) = F^{+}(x) - F^{-}(x)$.

Приймаючи до уваги формулу (1.44), одержані співвідношення для напружень і переміщень можна записати у вигляді:

$$\sigma_{12}^{(1)}(x,0) + iS_j\sigma_{22}^{(1)}(x,0) = F_j^{+}(x) - F_j^{-}(x), \qquad (1.47)$$

$$\left[v'(x)\right]+im_j\left[u'(x)\right]=\vartheta_j[F_j^+(x)+\gamma_j F_j^-(x)], \tag{1.48}$$

де $F_j(z)=\psi_1(z)+iS_j\psi_2(z)$, $m_j=\pm\sqrt{-\dfrac{q_{21}q_{22}}{q_{11}q_{12}}}$, $\gamma_j=-\dfrac{q_{21}+m_jq_{11}}{\vartheta_j}$, $S_j=\dfrac{q_{22}+m_jq_{12}}{q_{21}-m_jq_{11}}$,

$\left(S_j=-m_j\right)$, $\vartheta_j=q_{21}-m_jq_{11}$, $j=1,2$.

Співвідношення (1.47), (1.48) є досить зручними для розв'язку змішаних задач для біматеріальної площини з різними умовами на лінії поділу матеріалів.

Застосуємо далі співвідношення (1.47), (1.48) для розв'язку задачі для двох зовнішніх тріщин, показаних на рис. 1.2.

Приймаючи до уваги, що функції $\boldsymbol{W}(z)$, $\psi(z)$ та $F_j(z)$ побудовані з врахуванням неперервності напружень при переході через інтерфейс та задовольняючи за допомогою співвідношень (1.47), (1.48) I та II умовам (1.37), а також умовам (1.38), приходимо до такої задачі лінійного спряження для функції $F_1(z)$:

$$F_1^+(x)+\gamma_1F_1^-(x)=0,\ x\in(c,a), \tag{1.49}$$

$$F_1^+(x)-F_1^-(x)=g(x),\ x\notin(c,a), \tag{1.50}$$

де $g(x)=(P_1-iS_1P_2)\delta(x-d)$.

Слід відзначити, що для знаходження всіх необхідних факторів на лінії поділу матеріалів із співвідношень (1.47), (1.48) достатньо використати тільки співвідношення з індексом $j=1$.

Приймаючи до уваги відсутність навантажень на нескінченості розв'язок задачі (1.49), (1.50) будемо розшукувати при нульових умовах для функції $F_1(z)$ на нескінченності:

$$F_1(z)\Big|_{z\to 0} = 0 .$$

На основі [29] цей розв'язок має вигляд:

$$F_1(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int\limits_{x\notin(c,a)} \frac{g(t)}{X^+(t)(t-z)} dt , \tag{1.51}$$

де $X(z) = (z-c)^{-0.5+i\varepsilon}(z-a)^{-0.5-i\varepsilon}$, $\varepsilon = \dfrac{\ln \gamma_1}{2\pi}$. (1.52)

Знаходження останнього інтегралу приводить до формули:

$$F_1(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \frac{P_1 - iS_1P_2}{X^+(d)(d-z)} . \tag{1.53}$$

Приймаючи до уваги, що $F_1^+(x) = F_1^-(x) = F_1(x)$ для $x \notin (c,a)$ (крім $x = d$) і $F_1^-(x) = -\gamma_1^{-1}F_1^+(x)$ для $x \in (c,a)$ на основі формул (1.47), (1.48), одержуємо:

$$[v'(x)] + im_1[u'(x)] = \vartheta_1(1+\gamma_1)F_1(x) = \vartheta_1(1+\gamma_1)\frac{X(x)}{2\pi i}\frac{P_1 - iS_1P_2}{X^+(d)(d-x)} \text{ для } x > a \tag{1.54}$$

$$\sigma_{12}^{(1)}(x,0) + iS_1\sigma_{22}^{(1)}(x,0) = \frac{\gamma_1+1}{\gamma_1}F_1(x) = \frac{\gamma_1+1}{\gamma_1}\frac{X(x)}{2\pi i}\frac{P_1 - iS_1P_2}{X^+(d)(d-x)} \text{ для } x \in (c,a).$$

Відокремлюючи дійсну та уявну частину одержуємо наступні вирази для похідних від стрибків переміщень та напружень на лінії поділу матеріалів:

для $x > a$:

$$[u'(x)] = \frac{(1+\gamma_1)\vartheta_1}{2\pi(d-x)m_1}\sqrt{\frac{(d-c)(d-a)}{(x-c)(x-a)}}\left\{\sin\xi_1(x)\theta_2(d) - \cos\xi_1(x)\theta_1(d)\right\},$$

$$[v'(x)] = \frac{(1+\gamma_1)\vartheta_1}{2\pi(d-x)}\sqrt{\frac{(d-c)(d-a)}{(x-c)(x-a)}}\left\{\sin\xi_1(x)\theta_1(d) + \cos\xi_1(x)\theta_2(d)\right\},$$

для $x \in (c,a)$:

$$\sigma_{12}^{(1)}(x,0) = -\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1}\frac{1}{2\pi(d-x)}\sqrt{\frac{(d-c)(a-d)}{(x-c)(a-x)}}\left\{\cos\xi_2(x)\theta_3(d) - \sin\xi_2(x)\theta_4(d)\right\},$$

$$\sigma_{22}^{(1)}(x,0) = -\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1 S_1}\frac{1}{2\pi(d-x)}\sqrt{\frac{(d-c)(a-d)}{(x-c)(a-x)}}\left\{\cos\xi_2(x)\theta_4(d) + \sin\xi_2(x)\theta_3(d)\right\},$$

де $\xi_1(x) = \varepsilon\ln\frac{x-c}{x-a}$, $\xi_2(x) = \varepsilon\ln\frac{x-c}{a-x}$,

$$\theta_1(d) = P_1\cos\xi_1(d) - S_1P_2\sin\xi_1(d),\ \theta_2(d) = -S_1P_2\cos\xi_1(d) - P_1\sin\xi_1(d),$$

$$\theta_3(d) = P_1\sin\xi_2(d) + S_1P_2\cos\xi_2(d),\ \theta_4(d) = P_1\cos\xi_2(d) - S_1P_2\sin\xi_2(d).$$

Проводячи аналіз одержаних виразів для стрибків похідних від переміщень та напружень бачимо, що їх праві частини при $x \to a+0$ та $x \to a-0$, відповідно, нескінчену кількість разів змінюють знак, тобто для

такої моделі тріщини має місце добре відома осцилююча особливість [112], що характеризується фізично нереальним взаємопроникненням матеріалів.

1.4. Контактна модель для зовнішньої міжфазної тріщини

З метою усунення осцилюючої особливості розглянемо уточнену модель правої тріщини. Введемо поблизу її вершини a область гладкого контакту берегів (a,b) з заздалегідь невідомим положенням точки b (рис. 1.3).

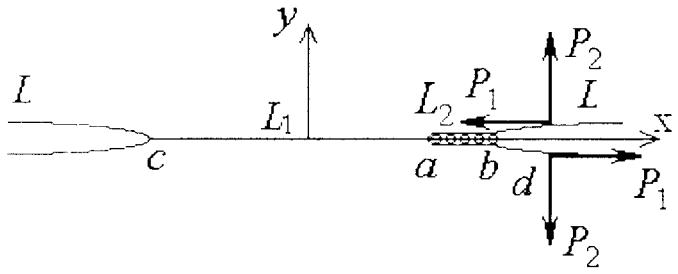

Рис. 1.3

Умови на інтерфейсі для цієї задачі крім співвідношень (1.37) включають:

$$\sigma_{12}^{\pm} = 0,\ [v] = 0,\ [\sigma_{22}] = 0,\ x \in (a,b) = L_2, \tag{1.55}$$

$$\sigma_{12}^{\pm} = P_1\delta(x-d),\ \sigma_{22}^{\pm} = -P_2\delta(x-d),\ x \notin (c,b) = L. \tag{1.56}$$

Задовольняючи умову (1.55) за допомогою співвідношень (1.47), (1.48), маємо:

$$\mathrm{Re}\left[F_1^+(x) + \gamma_1 F_1^-(x)\right] = 0, \tag{1.57}$$

$$\mathrm{Re}\left[F_1^+(x) - F_1^-(x)\right] = 0. \tag{1.58}$$

Співвідношення (1.57), (1.58) можна записати у вигляді наступного рівняння:

$$\mathrm{Re}\left[F_1^{\pm}(x)\right]=0\,. \tag{1.59}$$

Таким чином, задоволення всім необхідним граничним умовам з (1.37), (1.55), (1.56), приводить до таких рівнянь:

$$F_1^{+}(x)+\gamma_1 F_1^{-}(x)=0\,,\ x\in L_1\,, \tag{1.60}$$

$$\mathrm{Re}\,F_1^{\pm}(x)=0\,,\ x\in L_2\,, \tag{1.61}$$

$$F_1^{+}(x)-F_1^{-}(x)=g(x)\,,\ x\in L\,. \tag{1.62}$$

Отримана задача лінійного спряження є комбінованою крайовою задачею Діріхле – Рімана. Такого роду задачі розглядалися у роботах [1], [32], [35], стосовно проблеми взаємодії штампа з пружною півплощиною і в роботах [15], [95] стосовно внутрішньої міжфазної тріщини.

Приймаючи до уваги, що канонічний розв'язок однорідної задачі, відповідної (1.60) – (1.62), має вигляд [35], [15]:

$$X_0(z)=\frac{ie^{i\varphi(z)}}{\sqrt{(z-c)(z-a)}}\,, \tag{1.63}$$

де $\varphi(z)=2\varepsilon\ln\dfrac{\sqrt{(b-a)(z-c)}}{\sqrt{(b-c)(z-a)}+\sqrt{(a-c)(z-b)}}\,,\ \varepsilon=\dfrac{1}{2\pi}\ln\gamma\,,$

умови (1.60), (1.62) перепишемо у вигляді:

$$\frac{F_1^{+}(x)}{X_0^{+}(x)}-\frac{F_1^{-}(x)}{X_0^{-}(x)}=\begin{cases}0,\ x\in L_1\\ \dfrac{g(x)}{X_0^{+}(x)},\ x\in L\end{cases}.$$

Використовуючи інтеграл типу Коші [29], маємо:

$$\frac{F_1(z)}{X_0(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)dt}{X_0^+(t)(t-z)} + \Phi_0(z), \tag{1.64}$$

де $\Phi_0(z)$ – довільна функція, аналітична по всій площині, розрізаної вздовж відрізку L_2.

Підраховуючи інтеграл у (1.64), маємо:

$$F_1(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i}\frac{P_1 - iS_1P_2}{X_0^+(d)(d-z)} + \Phi_0(z)X_0(z). \tag{1.65}$$

Задовольняючи тепер граничну умову (1.61) та враховуючи, що $X_0(z)$ чисто уявна на L_2, маємо наступну задачу Діріхле для функції $\Phi_0(z)$:

$$\mathrm{Re}\left\{i\Phi_0^{\pm}(x)\right\} = -H(x),\ x \in (a,b),$$

де $H(x) = \mathrm{Re}\left\{\dfrac{P_1 - iS_1P_2}{2\pi X_0^+(d)(d-x)}\right\}$.

Частковий розв'язок цієї задачі, затухаючий по нескінченності, має вигляд [1, формула (46.25)]:

$$\Phi_0(z) = \frac{Y(z)}{2\pi}\int_{L_2}\frac{H^+(t)+H^-(t)}{Y^+(t)(t-z)}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{L_2}\frac{H^+(t)-H^-(t)}{t-z}dt,$$

де $Y(z) = \sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$.

Враховуючи, що $H^{+}(t)=H^{-}(t)=H(t)$ на L_2 маємо:

$$\Phi_0(z)=\frac{Y(z)}{2\pi^2}\mathrm{Re}\left\{\frac{P_1-iS_1P_2}{X_0^{+}(d)}\right\}I(z), \tag{1.66}$$

де $I(z)=\int\limits_a^b\frac{dt}{(d-t)Y^{+}(t)(t-z)}$.

Обчислюючи $I(z)$ по методиці [29], отримаємо:

$$I(z)=\frac{\pi i}{d-z}\left[\frac{1}{Y(z)}-\frac{1}{Y(d)}\right].$$

Підставляючи останню формулу в (1.66), а отриманий результат в (1.65) приходимо до співвідношення:

$$F_1(z)=\frac{X_0(z)}{2\pi i(d-z)}G(z), \tag{1.67}$$

де $G(z)=\mathrm{Re}\left[\frac{P_1-iS_1P_2}{X_0^{+}(d)}\right]\frac{Y(z)}{Y(d)}+i\,\mathrm{Im}\left[\frac{P_1-iS_1P_2}{X_0^{-}(d)}\right]$.

Беручи до уваги, що для $x\in L$ $F_1^{+}(x)=F_1^{-}(x)=F_1(x)$, а $F_1^{+}(x)=-\gamma_1^{-1}F_1^{-}(x)$ для $x\in L_1$, отримаємо на основі формул (1.47), (1.48):

$$\sigma_{12}^{(1)}(x,0)+iS_1\sigma_{22}^{(1)}(x,0)=\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1}\frac{X_0(x)}{2\pi i(d-x)}G(x) \text{ для } x\in L_1,$$

$$[v'(x)]+im_1[u'(x)]=\vartheta_1(1+\gamma_1)\frac{X_0(x)}{2\pi i(d-x)}G(x) \text{ для } x>b. \tag{1.68}$$

Нескладний аналітичний аналіз показує, що при $b \to a$ формули (1.67), (1.68) зводяться до формул (1.53), (1.54) осциляційної моделі, що говорить про правильність результатів, отриманих для контактної моделі.

Розглянемо далі визначення реальної довжини зони контакту, а також коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Розв'язок (1.67) є математично коректним для довільного положення точки b. Однак, він буде фізично коректним, якщо будуть виконані наступні додаткові умови:

$$\sigma_{22}^{(1)}(x,0) \le 0 \text{ для } x \in [a,b],$$
$$[v(x)] \ge 0 \text{ для } x \ge b. \tag{1.69}$$

Аналізуючи останній розв'язок отримаємо, що останні умови будуть виконані, якщо тріщина в точці b закривається плавно, таким чином, що $\sqrt{x-b}\,[v'(x)]\big|_{x\to b+0} \to 0$. Використовуючи в останньому виразі формулу (1.68), а також враховуючи, що $\varphi(b) = 0$, приходимо до такого рівняння:

$$\mathrm{Re}\left[\frac{P_1 - iS_1P_2}{X_0^+(d)}\right] = 0.$$

Підставляючи вираз для $X_0^+(d)$ одержаний на основі (1.63) та відокремлюючи дійсну частину, останнє рівняння перепишемо у вигляді:

$$tg\{\varphi(d)\} = -S_1\frac{P_2}{P_1}, \tag{1.70}$$

причому $\varphi(d)$ може бути переписано у вигляді:

$$\varphi(d) = 2\varepsilon \ln \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{(1+\lambda)}\sqrt{1-\chi} + \sqrt{1-(1+\lambda)\chi}}, \tag{1.71}$$

де $\chi = \dfrac{a-c}{d-c}$, $\lambda = \dfrac{b-a}{a-c}$.

Рівняння (1.70) є трансцендентним рівнянням для визначення відносної довжини області контакту λ. У випадку малих λ вважаючи, що $1+\lambda \approx 1$, отримаємо $\varphi(d) \approx \varepsilon \ln \dfrac{\lambda}{4(1-\chi)}$, тобто наближений розв'язок рівняння (1.70) можна подати у вигляді:

$$\lambda_0 \approx \tilde{\lambda}_0 = 4(1-\chi)\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left[arctg\left(-S_1\frac{P_2}{P_1}\right) + \pi n\right]\right\}, \tag{1.72}$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, однак його потрібно вибирати так, щоб $\tilde{\lambda}_0$ являло собою найбільший корінь рівняння (1.70) з проміжку $\left(0, \lambda^*\right)$, де $\lambda^* = \dfrac{d-a}{a-c}$. Точність розв'язку (1.72) є тим більшою, чим менше значення λ_0.

Знайдемо тепер КІН, який може визначати початок розвитку тріщини. У випадку контактної моделі таким КІН є:

$$k_2 = \lim_{x \to a-0} \sqrt{2\pi(a-x)}\,\sigma_{12}^{(1)}(x,0). \tag{1.73}$$

На основі формули (1.47) маємо:

$$\sigma_{12}^{(1)}(x,0) = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1}\mathrm{Re}\left\{F_1^+(x)\right\} \quad \text{для } x \in (c,a).$$

Використовуючи формулу (1.67), а також беручи до уваги, що $e^{i\varphi(x)} = \sqrt{\gamma} e^{i\varphi^*(x)}$, для $x \in (c,a)$, приходимо до виразу:

$$\sigma_{12}^{(1)}(x,0) = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} \mathrm{Re}\left\{ \frac{e^{i\varphi^*(x)}}{2\pi i (d-x)\sqrt{(x-c)(a-x)}} G^+(x) \right\} \text{ для } x \in (c,a),$$

де $\varphi^*(x) = 2\varepsilon \ln \dfrac{\sqrt{(b-a)(x-c)}}{\sqrt{(b-c)(a-x)} + \sqrt{(a-c)(b-x)}}$.

Підставляючи останню формулу в (1.73) та беручи до уваги, що $\varphi^*(a) = 0$, отримаємо:

$$k_2 = \frac{1+\gamma_1}{\sqrt{2\pi\gamma_1 (a-c)}(d-a)} \mathrm{Im}\left[\frac{P_1 - iS_1 P_2}{X_0^-(d)} \right].$$

Перетворюючи останню формулу з врахуванням рівняння (1.70), отримаємо:

$$k_2 = -\frac{1+\gamma_1}{\sqrt{2\pi\gamma_1}} \sqrt{\frac{d-c}{(a-c)(d-a)}} \sqrt{P_1^2 + S_1^2 P_2^2}. \tag{1.74}$$

Слід відзначити, що нормальне напруження в вершині тріщини має скінчену величину, яка може бути визначена на основі першої формули (1.68).

Для порівняння результатів, отриманих за допомогою двох моделей міжфазної тріщини, на рис. 1.4 приведені графіки $[v'(x)]$, отримані для осциляційній моделі на основі формули (1.54) (пунктирна лінія) та для ко-

нтактної моделі при $\lambda = \lambda_0 = 0.062$ на основі формули (1.68) (суцільна лінія).

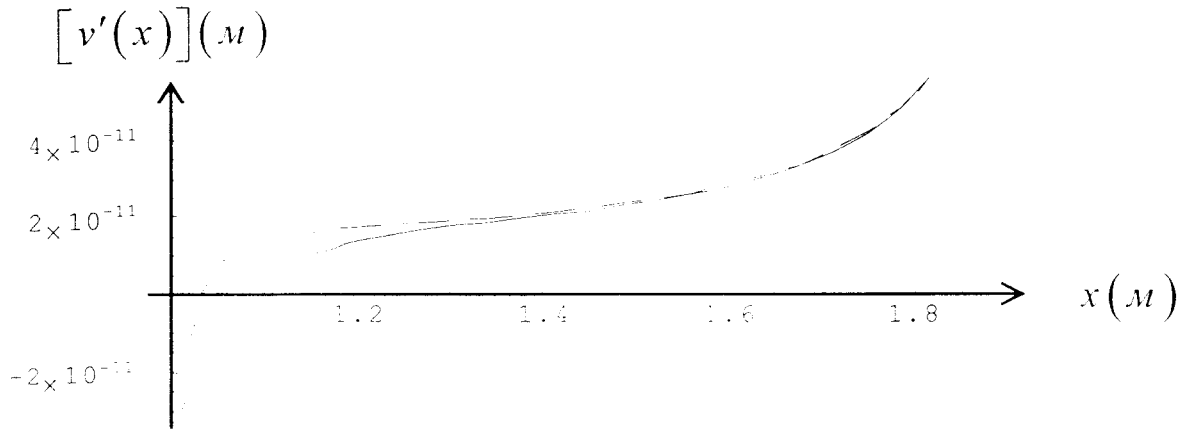

Рис. 1.4

В якості верхнього матеріалу вибирався алюміній з пружними характеристиками $\mu^{(1)} = 33.45\cdot10^9$ Па, $\upsilon^{(1)} = 0.32$, а нижнього – мідь з характеристиками $\mu^{(2)} = 75.75\cdot10^9$ Па, $\upsilon^{(2)} = 0.32$. Вважалось, що $c = -1м$, $a = 1м$, $d = 2м$, $P_1 = -10\frac{H}{м}$, $P_2 = 1\frac{H}{м}$. Тут та далі значення усіх величин приводяться у міжнародній системі одиниць СІ.

Видно, що в зоні контакту та в її околі різниця в результатах дуже велика, однак на деякій відстані від області контакту має місце хороша відповідність результатів, отриманих по двом моделям.

Далі основна увага приділялась контактній моделі міжфазної тріщини. На рис. 1.5 для $c = -1м$, $a = 1м$, $P_2 = 1\frac{H}{м}$ та $d = 1.5\,м$ приведені значення відносних довжин області контакту λ_0 в залежності від величини P_1.

Вибиралися біматеріали з такими характеристиками:

Біматеріал I: $\mu^{(1)} = 33.45\cdot10^9\frac{H}{м^2}$, $\upsilon^{(1)} = 0.32$ (алюміній),

$\mu^{(2)} = 75.75\cdot10^9\frac{H}{м^2}$, $\upsilon^{(2)} = 0.32$ (мідь).

нтактної моделі при $\lambda = \lambda_0 = 0.062$ на основі формули (1.68) (суцільна лінія).

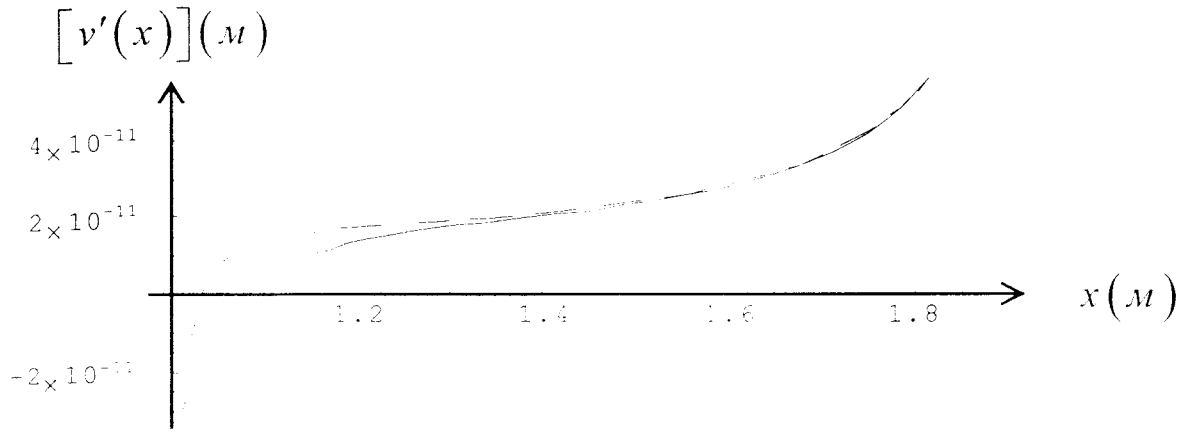

Рис. 1.4

В якості верхнього матеріалу вибирався алюміній з пружними характеристиками $\mu^{(1)} = 33.45\cdot10^9$ Па, $\upsilon^{(1)} = 0.32$, а нижнього – мідь з характеристиками $\mu^{(2)} = 75.75\cdot10^9$ Па, $\upsilon^{(2)} = 0.32$. Вважалось, що $c = -1м$, $a = 1м$, $d = 2м$, $P_1 = -10\frac{H}{м}$, $P_2 = 1\frac{H}{м}$. Тут та далі значення усіх величин приводяться у міжнародній системі одиниць СІ.

Видно, що в зоні контакту та в її околі різниця в результатах дуже велика, однак на деякій відстані від області контакту має місце хороша відповідність результатів, отриманих по двом моделям.

Далі основна увага приділялась контактній моделі міжфазної тріщини. На рис. 1.5 для $c = -1м$, $a = 1м$, $P_2 = 1\frac{H}{м}$ та $d = 1.5\,м$ приведені значення відносних довжин області контакту λ_0 в залежності від величини P_1.

Вибиралися біматеріали з такими характеристиками:

Біматеріал I: $\mu^{(1)} = 33.45\cdot10^9\frac{H}{м^2}$, $\upsilon^{(1)} = 0.32$ (алюміній),

$\mu^{(2)} = 75.75\cdot10^9\frac{H}{м^2}$, $\upsilon^{(2)} = 0.32$ (мідь).

В цьому випадку $\gamma = 0.814$, $\varepsilon = -0.033$.

Біматеріал II: $C_{11}^{(1)} = 26.6C_{66}^{(1)}$, $C_{12}^{(1)} = 3.15C_{66}^{(1)}$, $C_{22}^{(1)} = 3.6C_{66}^{(1)}$, $C_{66}^{(1)} = 33.45 \cdot 10^9$,

$C_{11}^{(2)} = 26.6C_{66}^{(2)}$, $C_{12}^{(2)} = 3.15C_{66}^{(2)}$, $C_{22}^{(2)} = 3.6C_{66}^{(2)}$, $C_{66}^{(2)} = 75.75 \cdot 10^9$

(комбінація ортотропних матеріалів).

В цьому випадку $\gamma = 0.848$, $\varepsilon = -0.026$.

Біматеріал III: $\mu^{(1)} = 33.45 \cdot 10^9 \dfrac{H}{м^2}$, $\upsilon^{(1)} = 0.02$,

$\mu^{(2)} = 1000 \cdot \mu^{(1)}$, $\upsilon^{(2)} = 0.3$

(верхня півплощина виготовлена з ідеалізованого матеріалу з малим коефіцієнтом Пуассона і з умовами на відрізку $[c, a]$ нижньої границі, близькими до жорсткого закріплення).

В цьому випадку $\gamma = 0.343$, $\varepsilon = -0.17$.

На рис. 1.5 криві, що відповідають біматеріалам I, II, III позначені як I, II, III відповідно.

В табл. 1.1 – 1.6 наведені значення λ_0 в залежності від величини P_1. Вибирались ті ж самі значення c, a, P_2 та d, що і для рис. 1.5.

В табл. 1.7 – 1.9 приведені значення КІН $k_2 \left(\dfrac{H}{м^{\frac{3}{2}}} \right)$, які відповідають біматеріалам та зонам контакту з рис. 1.5 та табл. 1.1, 1.3, 1.5.

З отриманих результатів випливає, що зсувне навантаження P_1 суттєво впливає як на довжину зони контакту, так і на КІН k_2. При цьому видно, що при від'ємних значеннях P_1/P_2 довжини зон контакту, для досить великих значень цього коефіцієнту, стають співвимірними з довжиною ділянки зчеплення $[c, a]$. В той же час для $P_1/P_2 \geq 0$ довжини зон контакту є дуже малими, що якісно узгоджується з результатами робіт [73], [15]. Значення відносних довжин області контакту для біматеріалів I та II не так суттєво відрізняються як для біматеріалів I і III. Щодо стосується КІН k_2,

то з одержаних результатів видно, що модуль його значення зростає при рості сили P_1, а також при наближенні точки прикладання сил P_1 і P_2 до вершини тріщини. При цьому значення k_2 для біматеріалів I і II особливо для великих P_1/P_2 є досить близькими, що пояснюється несуттєвою відмінністю біматеріальних констант ε для цих пар матеріалів.

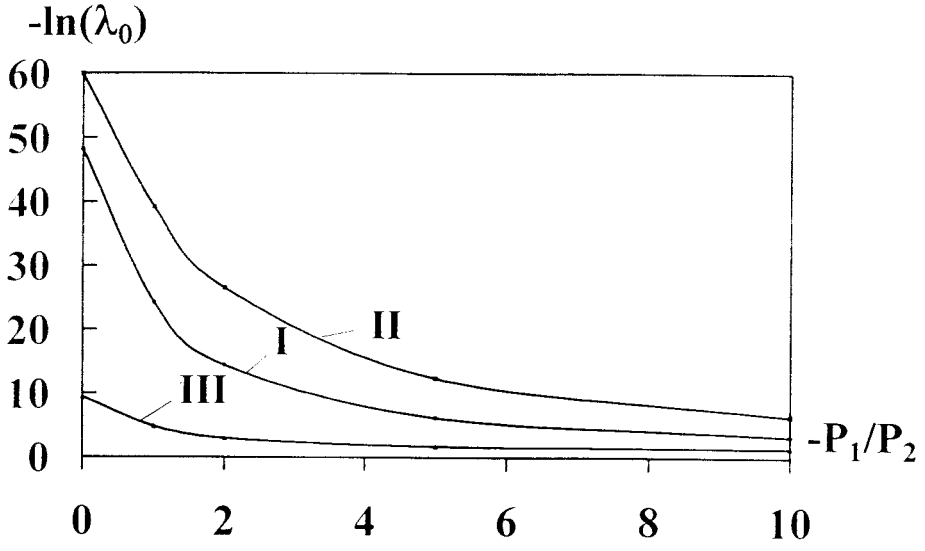

Рис. 1.5

Таблиця 1.1

Залежності λ_0 від співвідношення величин зосереджених сил та точки їх прикладання для $P_1/P_2 \le 0$ для біматеріалу I

$\frac{d-a}{a-c}$ \ P_1/P_2	-100	-10	-5	-2	-1	0
0.5	$5.03\cdot10^{-1}$	$6.15\cdot10^{-2}$	$3.21\cdot10^{-3}$	$9.49\cdot10^{-7}$	$5.14\cdot10^{-11}$	$1.98\cdot10^{-21}$
1	$9.71\cdot10^{-1}$	$9.52\cdot10^{-2}$	$4.83\cdot10^{-3}$	$1.42\cdot10^{-6}$	$7.72\cdot10^{-11}$	$2.97\cdot10^{-21}$
2	1.87	$1.31\cdot10^{-1}$	$6.45\cdot10^{-3}$	$1.9\cdot10^{-6}$	$1.03\cdot10^{-10}$	$3.97\cdot10^{-21}$

Таблиця 1.2

Залежності λ_0 від співвідношення величин зосереджених сил та точки їх прикладання для $P_1/P_2 > 0$ для біматеріалу I

$\frac{d-a}{a-c}$ \ P_1/P_2	1	2	5	10	100
0.25	$4.59\cdot10^{-32}$	$2.49\cdot10^{-36}$	$7.33\cdot10^{-40}$	$3.71\cdot10^{-41}$	$2.4\cdot10^{-42}$
0.5	$7.65\cdot10^{-32}$	$4.14\cdot10^{-36}$	$1.22\cdot10^{-39}$	$6.18\cdot10^{-41}$	$4\cdot10^{-42}$
1	$1.15\cdot10^{-31}$	$6.21\cdot10^{-36}$	$1.83\cdot10^{-39}$	$9.27\cdot10^{-41}$	$6\cdot10^{-42}$
2	$1.53\cdot10^{-31}$	$8.28\cdot10^{-36}$	$2.44\cdot10^{-39}$	$1.24\cdot10^{-40}$	$8\cdot10^{-42}$

Таблиця 1.3

Залежності λ_0 від співвідношення величин зосереджених сил та точки їх прикладання для $P_1/P_2 \le 0$ для біматеріалу II

$\frac{d-a}{a-c}$ \ P_1/P_2	-100	-10	-5	-2	-1	0
0.5	$4.34\cdot10^{-1}$	$2.69\cdot10^{-3}$	$7.44\cdot10^{-6}$	$5.68\cdot10^{-12}$	$1.62\cdot10^{-17}$	$1.65\cdot10^{-26}$
1	$8.32\cdot10^{-1}$	$4.04\cdot10^{-3}$	$1.12\cdot10^{-5}$	$8.52\cdot10^{-12}$	$2.43\cdot10^{-17}$	$2.48\cdot10^{-26}$
2	1.53	$5.39\cdot10^{-3}$	$1.49\cdot10^{-5}$	$1.14\cdot10^{-11}$	$3.25\cdot10^{-17}$	$3.31\cdot10^{-26}$

Таблиця 1.4

Залежності λ_0 від співвідношення величин зосереджених сил та точки їх прикладання для $P_1/P_2 > 0$ для біматеріалу II

$\frac{d-a}{a-c}$ \ P_1/P_2	1	2	5	10	100
0.25	$1.01\cdot10^{-35}$	$2.88\cdot10^{-41}$	$2.2\cdot10^{-47}$	$6.09\cdot10^{-50}$	$2.3\cdot10^{-52}$
0.5	$1.68\cdot10^{-35}$	$4.81\cdot10^{-41}$	$3.67\cdot10^{-47}$	$1.01\cdot10^{-49}$	$3.83\cdot10^{-52}$
1	$2.53\cdot10^{-35}$	$7.21\cdot10^{-41}$	$5.51\cdot10^{-47}$	$1.52\cdot10^{-49}$	$5.75\cdot10^{-52}$
2	$3.37\cdot10^{-35}$	$9.61\cdot10^{-41}$	$7.34\cdot10^{-47}$	$2.03\cdot10^{-49}$	$7.66\cdot10^{-52}$

Таблиця 1.5

Залежності λ_0 від співвідношення величин зосереджених сил та точки їх прикладання для $P_1/P_2 \le 0$ для біматеріалу III

$\frac{d-a}{a-c}$ \ P_1/P_2	-100	-10	-5	-2	-1	0
0.5	$4.89\cdot10^{-1}$	$4.12\cdot10^{-1}$	$3.2\cdot10^{-1}$	$8.36\cdot10^{-2}$	$1.32\cdot10^{-2}$	$1.32\cdot10^{-4}$
1	$9.24\cdot10^{-1}$	$8.5\cdot10^{-1}$	$5.71\cdot10^{-1}$	$1.31\cdot10^{-1}$	$1.99\cdot10^{-2}$	$1.97\cdot10^{-4}$
2	1.99	1.58	$9.41\cdot10^{-1}$	$1.82\cdot10^{-1}$	$2.67\cdot10^{-2}$	$2.63\cdot10^{-4}$

Таблиця 1.6

Залежності λ_0 від співвідношення величин зосереджених сил та точки їх прикладання для $P_1/P_2 > 0$ для біматеріалу III

$\frac{d-a}{a-c}$ \ P_1/P_2	1	2	5	10	100
0.25	$7.85\cdot10^{-7}$	$1.19\cdot10^{-7}$	$2.49\cdot10^{-8}$	$1.4\cdot10^{-8}$	$8.27\cdot10^{-9}$
0.5	$1.31\cdot10^{-6}$	$1.98\cdot10^{-7}$	$4.14\cdot10^{-8}$	$2.33\cdot10^{-8}$	$1.38\cdot10^{-8}$
1	$1.96\cdot10^{-6}$	$2.97\cdot10^{-7}$	$6.21\cdot10^{-8}$	$3.5\cdot10^{-8}$	$2.07\cdot10^{-8}$
2	$2.62\cdot10^{-6}$	$3.96\cdot10^{-7}$	$8.29\cdot10^{-8}$	$4.67\cdot10^{-8}$	$2.76\cdot10^{-8}$

Таблиця 1.7

Зміна КІН k_2 в залежності від співвідношення $P_1/P_2 \le 0$ зосереджених сил та точки їх прикладання для біматеріалу I

$\frac{d-a}{a-c}$ \ P_1/P_2	-100	-10	-5	-2	-1	0
0.25	-126.831	-12.746	-6.467	-2.837	-1.794	-1.268
0.5	-98.243	-9.873	-5.009	-2.197	-1.389	-0.982
1	-80.215	-8.061	-4.09	-1.794	-1.134	-0.802
2	-69.468	-6.981	-3.542	-1.553	-0.982	-0.695

Таблиця 1.8

Зміна КІН k_2 в залежності від співвідношення $P_1/P_2 \le 0$ зосереджених сил та точки їх прикладання для біматеріалу II

$\frac{d-a}{a-c}$ \ P_1/P_2	-100	-10	-5	-2	-1	0
0.25	-126.606	-12.83	-6.665	-3.281	-2.441	-2.087
0.5	-98.068	-9.938	-5.162	-2.542	-1.891	-1.617
1	-80.073	-8.114	-4.215	-2.075	-1.544	-1.32
2	-69.345	-7.027	-3.65	-1.797	-1.337	-1.143

Таблиця 1.9

Зміна КІН k_2 в залежності від співвідношення $P_1/P_2 \le 0$ зосереджених сил та точки їх прикладання для біматеріалу III

$\frac{d-a}{a-c}$ \ P_1/P_2	-100	-10	-5	-2	-1	0
0.25	-144.657	-14.537	-7.376	-3.234	-2.046	-1.446
0.5	-112.051	-11.26	-5.713	-2.505	-1.585	-1.12
1	-91.489	-9.194	-4.665	-2.046	-1.294	-0.915
2	-79.232	-7.962	-4.04	-1.772	-1.12	-0.792

1.5. Аналіз контактної моделі крайової міжфазної тріщини за допомогою методу скінчених елементів

З метою порівняння результатів у цьому параграфі проведемо визначення зони контакту для крайової міжфазной тріщини за допомогою методу скінчених елементів.

Розглядається плоска деформація нескінченно довгого по напряму осі x_3 тіла, поперечний переріз якого показано на рис. 1.6.

Припускаємо, що матеріал ізотропний з модулем зсуву μ та коефіцієнтом Пуассона ν, а поперечні розміри області h_1 і h_2. Вважаємо, що ділянка [c, a] нижньої границі жорстко защемлена, а на ділянках $[0, c)$, $(a, h_1]$ границі виникли крайові тріщини. Вважається також, що на ділянці (a, b) невідомої довжини в околі вершини правої тріщини має місце зона гладкого контакту, а її берега навантажені системою зосереджених сил (P_1, P_2), котрі прикладені в точці с координатами $(d, 0)$.

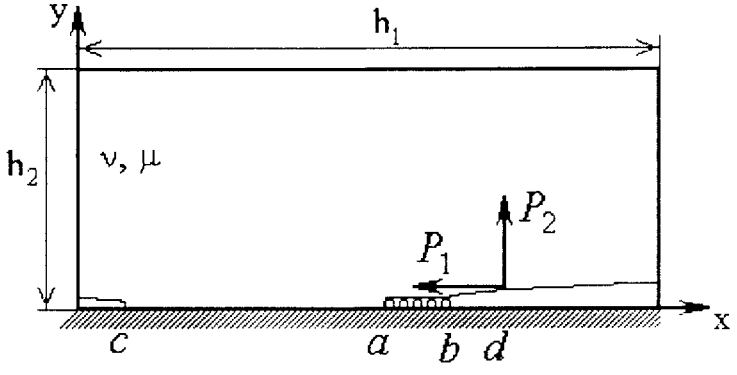

Рис. 1.6

Граничні умови поставленої задачі можуть бути записані у вигляді:

$$\sigma_{xx}(x,h_2)=0,\ \sigma_{yy}(x,h_2)=0, \tag{1.75}$$

$$\sigma_{xx}(x,y)=0,\ \sigma_{xy}(x,y)=0 \ \text{ для } x=0;\ h_1, \tag{1.76}$$

$$\sigma_{yy}(x,0)=P_1\delta(x-d),\sigma_{yy}(x,0)=-P_2\delta(x-d) \text{ для } x\in[0,c]\cup[b,h_1],(1.77)$$

$$u(x,0)=v(x,0)=0 \text{ для } x\in[c,a], \tag{1.78}$$

$$\sigma_{xy}(x,0)=0,\ v(x,0)=0 \text{ для } x\in[a,b]. \tag{1.79}$$

Для розв'язку поставленої задачі використовується метод скінчених елементів [26]. Область розбивається на восьмовузлові ізопараметричні елементи (рис. 1.7), функції форми яких мають вигляд:

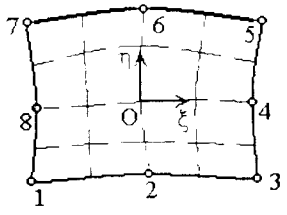

Рис. 1.7

$$\begin{cases} N_i=\frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)-\frac{1}{4}(1+\xi^2)(1+\eta\eta_i)-\frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2), \text{ для } i=1,3,5,7, \\ N_i=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i), \text{ для } i=2,6, \\ N_i=\frac{1}{2}(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2), \text{ для } i=4,8. \end{cases}$$

Зв'язок між глобальними (x,y) координатами та локальними (ξ,η) координатами елементів здійснюється за допомогою залежностей:

$$x=\sum_{i=1}^{8}N_ix_i,\ y=\sum_{i=1}^{8}N_iy_i,$$

де (x_i,y_i) – глобальні координати вузлів. У використаних ізопараметричних скінчених елементах функції форми використовуються також для інтерполяції переміщень по їх вузлових значеннях:

$$u = \sum_{i=1}^{8} N_i u_i,\ v = \sum_{i=1}^{8} N_i v_i.$$

В результаті дискретизації сформульованої задачі та використання методу скінчених елементів вона зводиться до визначення невідомих переміщень із системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$[K]\{\delta\} = \{F\},$$

де $\{\delta\}$ – вектор вузлових переміщень, $\{F\}$ – вектор навантаження, $[K]$ – глобальна матриця жорсткості.

Розбиття області на елементи показано на рис. 1.8 – 1.10.

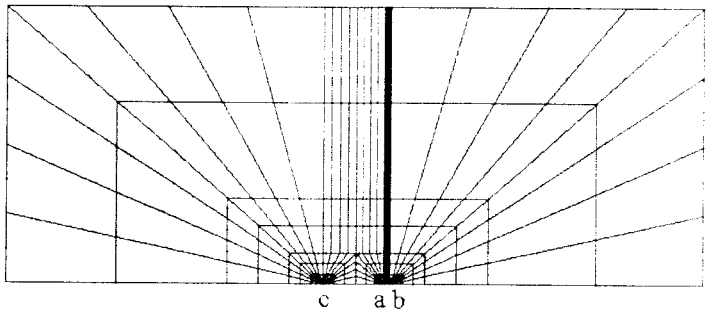

Рис. 1.8

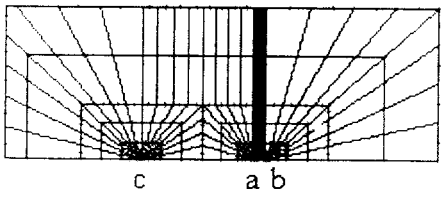

Рис. 1.9

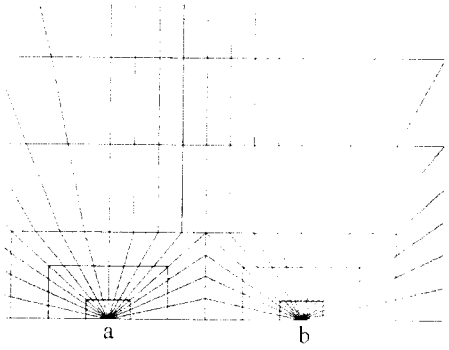

Рис. 1.10

При цьому на рис. 1.8 показано глобальне розбиття. На рис. 1.9 приведена структура сітки в околі ділянки границі $[c, b]$. А на рис. 1.10

показана сітка в локальній області поблизу точок a та b, де згущення сітки є особливо суттєвим.

Слід також відмітити, що для елементів, котрі примикають до точок a та b здійснено зсув вузлів на $1/4$ довжини відповідних сторін, що дає можливість змоделювати кореневу особливість напружень та деформацій у точках a та b.

Розв'язок задачі будувався при довільному положенні точки b, однак отриманий розв'язок буде фізично коректним, якщо будуть виконані наступні додаткові умови:

$$\sigma_{yy} \le 0 \text{ для } x \in [a,b], \quad v \ge 0 \text{ для } x \in [b,h_1]. \tag{1.80}$$

Задоволення вказаних умов проводилося за допомогою методу послідовних наближень.

При практичному застосуванні скінчено-елементної програми та побудови сітки положення точки a знаходилося з тієї умови, щоб виконувалися нерівності (1.80).

Перевірка виконання цих нерівностей була зроблена за допомогою аналізу вузлових значень вертикальних переміщень справа від точки b та вузлових значень вертикальних компонент реакцій зліва від цієї точки. Оскільки зміна положення точки b потребує непринципової, але не зовсім зручної перебудови сітки, то положення цієї точки вибиралося фіксованим, а змінювалася величина коефіцієнта P_1/P_2.

Для аналізу був обраний матеріал з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0.2625$, що дає $\gamma = 1.95$. Координати вершин тріщин вибиралися рівними $c = -10$ мм, $a = 9.8$ мм, а положення точки b брали рівним 10 мм. Номера та координати вузлів, близьких до точки b наведені у табл. 1.10.

Таблиця 1.10

Координати вузла	№ вузла
9.981	30029
9.986	30025
9.990	30021
9.994	30017
9.996	30013
9.998	30009
9.9995	30005
b=10	30001 36401
10.0005	36405
10.002	36409
10.004	36413
10.006	36417
10.01	36421
10.014	36425
10.02	36429
10.03	36433

З приведеної таблиці видно, що розмір мінімального елемента, прилеглого до вершини тріщини, дорівнював $2\cdot10^{-3}$ мм, що є рівним приблизно 10^{-4} розміру тріщини.

У табл. 1.11 приведені результати розрахунків при $d=15$ мм, $P_2=1\dfrac{H}{м}$ та різних значеннях P_1/P_2. У правому стовбці вказані вузли, в яких не виконувалась одна з умов (1.80).

Таблиця 1.11

P_1/P_2	Номери вузлів
1.8	30005–30029 $(u_2<0)$
1.9	30005–30009 $(u_2<0)$
1.95	36405–36429 $(F_2<0)$
1.91	30005 $(u_2<0)$
1.92	36405–36413 $(F_2<0)$

З наведених результатів випливає, що значення P_1/P_2, при якому виконуються обидві нерівності (1.80), дорівнює приблизно 1.913.

Розглянемо тепер випадок, коли область нескінчена. Нехай границі області, зображеної на рис. 1.6, прямують у нескінченість.

В цьому випадку приходимо до задачі, точний розв'язок якої отримано у попередньому пункті. Використання рівнянь (1.70), (1.72) у випадку тріщини $[9.8\ \text{мм}, \infty]$ вздовж границі защемленої напівплощини з зоною контакту $[9.8\ мм, 10\ \text{мм}]$ під дією сил P_1 та P_2, прикладених в точці з координатами $(15\ \text{мм}, 0\ \text{мм})$, привели до значення P_1/P_2 рівного 1.981, котре забезпечує виконання обох нерівностей (1.80).

Порівняння цього значення з результатами, отриманими МСЕ, показує що похибка є 3.55 %.

Таким чином, аналітичний підхід [21], заснований на рівняннях (1.70), (1.72) дає добре узгодження з результатами скінчено-елементного аналізу. Незначна ж розбіжність у результатах виникає, вірогідно, у зв'язку з тим, що скінчена область, зображена на рис. 1.6, при аналітичному підході апроксимується нескінченою півплощиною.

ВИСНОВКИ

В першому розділі проведено аналіз літератури присвяченої дослідженню тріщин, в тому числі і міжфазних тріщин, котрі розташовані на лінії стику двох різнорідних матеріалів. Описані основні методи дослідження міжфазних тріщин, котрі зустрічаються в літературі. Записані представлення основних компонент НДС для анізотропного біматеріального простору. Розглянута зовнішня міжфазна тріщина в ортотропному біматеріалі під дією зосереджених сил. Проведений аналіз класичної та контактної моделі цієї задачі. На основі відомих представлень компонент НДС через кусково-голоморфні вектор-функції одержано нові представлення вище згаданого типу, які є зручними для дослідження зовнішніх тріщин в анізотропному матеріалі. Задача для зовнішньої тріщини з зоною контакту між двома анізотропними матеріалами під дією механічного навантаження зведена до комбінованої крайової задачі Діріхле – Рімана, яка розв'язана точно. Одержано трансцендентне рівняння для визначення довжини зони контакту, а також явні вирази для напружень і їх коефіцієнтів інтенсивності. Проведений чисельний аналіз одержаних розв'язків. Досліджені залежності величин зон контакту і КІН від навантаження і характеристик матеріалу. Також проведений аналіз контактної моделі крайової міжфазної тріщини за допомогою методу скінчених елементів.

РОЗДІЛ 2

Термопружна задача для зовнішньої міжфазної тріщини з зоною контакту в анізотропному біматеріалі

2.1. Зовнішня міжфазна тріщина в біматеріальному просторі під дією температурного поля

2.1.1. Постановка задачі. Аналіз осциляційної моделі для зовнішньої тріщини під дією температурного поля

Розглянемо дві різнорідні ортотропні півплощини $y \geq 0$ і $y \leq 0$ з пружними характеристиками $C_{ij}^{(1)}$ і $C_{ij}^{(2)}$ відповідно, які в області розділу матеріалів мають ділянки жорсткого зчеплення L_1, відкриті ділянки L, що відповідають тріщинам, і, крім того, вони також можуть мати ділянки гладкого безфрикційного контакту L_2. Будемо вважати, що півплощини нагріті (охолоджені) на температуру ΔT порівняно з нормальною.

Використовуючи підхід Вольтера вважаємо, що у півплощинах температурні напруження $\sigma_{ij}^t = 0$, а температурні переміщення $u_i^t = \alpha_{ij} \Delta T x_j$, де α_{ij} – коефіцієнти лінійного теплового розширення. Останнє справедливо, якщо півплощини не зв'язані.

Вважаючи, що півплощини зв'язані на окремих ділянках, одержуємо, що умови сумісності переміщень можуть бути виконані за рахунок накладення пружного рішення u_i так, що на вказаних ділянках при $y = 0$:

$$\left(u_i + u_i^t\right)^{(1)} = \left(u_i + u_i^t\right)^{(2)}, \tag{2.1}$$

$$\sigma_{2i}^{(1)} = \sigma_{2i}^{(2)}, \tag{2.2}$$

У розділі 1, п. 1.2 отримані наступні вирази для вектору напружень $\boldsymbol{t}^{(1)}(x,0)$ та похідної від переміщень $\left[\boldsymbol{u}'(x,0)\right]$ на інтерфейсі:

$$\boldsymbol{t}^{(1)}(x,0) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{W}^{+}(x) - \overline{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{W}^{-}(x), \tag{2.3}$$

$$\left[\boldsymbol{u}'(x)\right] = \boldsymbol{W}^{+}(x) - \boldsymbol{W}^{-}(x), \tag{2.4}$$

де для випадку плоскої деформації $\boldsymbol{t}^{(i)}(x,0) = \begin{Bmatrix} \sigma_{12}^{(i)}(x,0) \\ \sigma_{22}^{(i)}(x,0) \end{Bmatrix}$, $\left[\boldsymbol{u}'(x)\right] = \begin{Bmatrix} \left[u'(x)\right] \\ \left[v'(x)\right] \end{Bmatrix}$,

$\boldsymbol{W}(z) = \begin{Bmatrix} W_1(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}$ – вектор-функція комплексної змінної z, яка аналітична у кожній півплощині, включаючи ділянки інтерфейсу L_1, які зчеплені, $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$ – біматеріальна матриця, елементи якої визначаються пружними властивостями матеріалів.

Перетворюючи співвідношення (2.3), (2.4) аналогічно п. 1.2, тобто вводячи вектор-функцію $\boldsymbol{R}(z)$, аналітичну в кожній півплощині, за правилом:

$$\boldsymbol{R}(z) = \begin{cases} \boldsymbol{G}\boldsymbol{W}(z), y > 0 \\ \overline{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{W}(z), y < 0 \end{cases}, \tag{2.5}$$

співвідношення (2.3), (2.4) запишемо у вигляді:

$$\boldsymbol{t}^{(1)}(x,0) = \boldsymbol{R}^{+}(x) - \boldsymbol{R}^{-}(x), \tag{2.6}$$

$$\left[\boldsymbol{u}'(x)\right] = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}^{+}(x) - \overline{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{R}^{-}(x), \tag{2.7}$$

де $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{G}^{\prime} = \begin{bmatrix} iq_{11} & q_{12} \\ q_{21} & iq_{22} \end{bmatrix}$,

причому всі q_{ij} – дійсні. Вектор-функція $\mathbf{R}(z)$ має той же сенс, що і функція $\psi(z)$ з п. 1.2, але для зручності у випадку термопружної задачі використовуємо для неї спеціальне позначення.

Так як на L $\boldsymbol{t}^{(1)} = 0$, тобто $\boldsymbol{R}^{+}(x) - \boldsymbol{R}^{-}(x) = 0$, то вектор-функція $\boldsymbol{R}(z)$ аналітична на всій площині за винятком ділянки $L_1 = [c, a]$. Тоді з врахуванням (2.7) продиференційоване співвідношення (2.1) дає наступну векторну задачу Гільберта – Рімана:

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}^{+}(x) - \overline{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{R}^{-}(x) = \boldsymbol{\Delta}^{t}, \; x \in L_1, \tag{2.8}$$

де вектор $\boldsymbol{\Delta}^{t} = \begin{Bmatrix} (\alpha_{11}^{(2)} - \alpha_{11}^{(1)})\Delta T \\ 0 \end{Bmatrix}$.

Оскільки для $x \notin L_1$ $\boldsymbol{R}^{+}(x) = \boldsymbol{R}^{-}(x) = \boldsymbol{R}(x)$, тобто для $x \notin L_1$ $\left[\boldsymbol{u}'(x)\right] = \left(\boldsymbol{Q} - \overline{\boldsymbol{Q}}\right)\boldsymbol{R}(x)$, а пружні деформації на нескінченності дорівнюють нулю $\left(\left[\boldsymbol{u}'\right]_{z\to\infty} = 0\right)$, то $\left(\boldsymbol{Q} - \overline{\boldsymbol{Q}}\right)\boldsymbol{R}(x)\Big|_{z\to\infty} = 0$. Це означає, що

$$\boldsymbol{R}(z)\Big|_{z\to\infty} = 0. \tag{2.9}$$

Останнє співвідношення можна розглядати як умову на нескінченності щодо невідомої вектор-функції задачі (2.8).

Розглянемо спочатку осциляційну модель зовнішньої тріщини.

Нехай має місце плоска деформація і ортотропні півплощини, що являють собою характерний поперечний переріз, зчеплені на ділянці $L_1 = \{c < x < a\}$, $y = 0$, а на іншій частині інтерфейсу $x < c$, $y = 0$ та $x > a$,

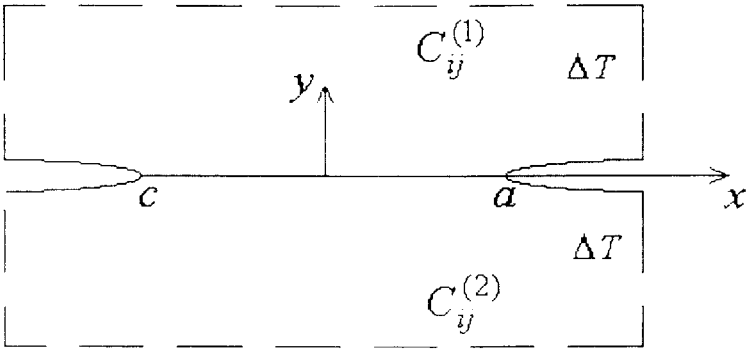

Рис. 2.1

$y = 0$ розташовані дві зовнішні тріщини (рис. 2.1).

Вважаємо як і раніше, що півплощини нагріті (охолоджені) на температуру ΔT у порівнянні з нормальною. Тоді, припускаючи, що тріщини відкриті, умови на інтерфейсі для поставленої задачі мають вид:

$$\sigma_{12}^{\pm} = 0,\ \sigma_{22}^{\pm} = 0, \text{ для } x \notin (c,a).$$

$$u^{+} = u^{-},\ v^{+} = v^{-},\ \sigma_{12}^{+} = \sigma_{12}^{-},\ \sigma_{22}^{+} = \sigma_{22}^{-}, \text{ для } x \in (c,a). \tag{2.10}$$

Комбінуючи рівняння (2.6) та (2.7) приходимо до співвідношень аналогічних (1.47), (1.48). Для зручності приведемо їх тут:

$$\sigma_{12}^{(1)}(x,0) + iS_j\sigma_{22}^{(1)}(x,0) = F_j^{+}(x) - F_j^{-}(x), \tag{2.11}$$

$$\left[v'(x)\right] + im_j\left[u'(x)\right] = \vartheta_j[F_j^{+}(x) + \gamma_j F_j^{-}(x)], \tag{2.12}$$

де $F_j(z) = R_1(z) + iS_j R_2(z)$, $m_j = \pm\sqrt{-\dfrac{q_{21}q_{22}}{q_{11}q_{12}}}$, $\gamma_j = -\dfrac{q_{21} + m_j q_{11}}{\vartheta_j}$,

$$S_j = \frac{q_{22} + m_j q_{12}}{q_{21} - m_j q_{11}}, \ \left(S_j = -m_j\right), \ \vartheta_j = q_{21} - m_j q_{11}, \ j = 1,2.$$

Враховуючи те, що функції $\boldsymbol{W}(z)$, $\boldsymbol{R}(z)$ і $F_j(z)$ побудовані з урахуванням неперервності напружень при переході через інтерфейс та задовольняючи за допомогою співвідношень (2.11), (2.12) першій і другій умовам (2.10) приходимо до наступної задачі лінійного спряження для функції $F_1(z)$:

$$F_1^-(x) + \gamma_1 F_1^-(x) = iA, \ x \in [c, a], \tag{2.13}$$

з умовою на нескінченності

$$F_1(z)\big|_{z \to \infty} = 0, \text{ де } A = \frac{m_1}{\vartheta_1}\Delta_1^t.$$

Із співвідношень (2.11), (2.12) використані тільки співвідношення з індексом $j = 1$, що цілком достатньо для одержання необхідних результатів.

На підставі [29] розв'язок задачі (2.13) має вид:

$$F_1(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_c^a \frac{iAdt}{X^+(t)(t-z)},$$

де $X(z) = (z-c)^{-0.5+i\varepsilon}(z-a)^{-0.5-i\varepsilon}$, $\varepsilon = \dfrac{\ln \gamma_1}{2\pi}$.

Обчислення останнього інтеграла і задоволення умов на нескінченності приводить до формули:

$$F_1(z) = \frac{Ai}{1+\gamma_1}\left\{1 - X(z)\left\{\tilde{z} - i(a-c)\varepsilon\right\}\right\}, \tag{2.14}$$

де $\tilde{z} = z - \dfrac{c+a}{2}$.

Наступне використання формули (2.12) з урахуванням умови $F_1^+(x) = F_1^-(x) = F_1(x)$ для $x \notin (c,a)$ дає вираз для стрибка похідної від переміщень при переході через інтерфейс:

$$\left[v'(x)\right] + im_1\left[u'(x)\right] = \vartheta_1(1+\gamma_1)F_1(x).$$

Після підстановки виразу для $F_1(z)$ маємо:

$$\left[v'(x)\right] + im_1\left[u'(x)\right] = im_1\Delta_1'\left\{1 - X(x)\left\{\tilde{x} - i(a-c)\varepsilon\right\}\right\}. \tag{2.15}$$

Аналіз останнього співвідношення показує, що при $x \to a+0$ права частина цього виразу нескінченну кількість разів змінює знак, тобто для такої моделі тріщини і в термопружному випадку виникла осцилююча особливість [112], що характеризується фізично нереальним взаємопроникненням матеріалів.

Розглянемо тому контактну модель, про яку вже йшла мова в попередньому розділі.

2.1.2. Основні співвідношення контактної моделі

Для усунення осцилюючої особливості розглянемо уточнену модель правої тріщини, яка припускає, що поблизу її вершини a має місце область гладкого контакту берегів (a,b) із заздалегідь невідомим положенням точки b (рис. 2.2).

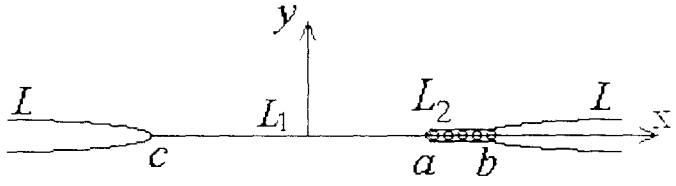

Рис. 2.2

Умови на інтерфейсі в цьому випадку, крім співвідношень (2.10), включають:

$$\sigma_{12}^{\pm}=0,\ [v]=0,\ x\in(a,b)=L_2. \tag{2.16}$$

Умови (2.16) задовольняємо за допомогою співвідношень (2.11), (2.12). Проводячі аналіз, аналогічний співвідношенням (1.57), (1.58) розділу 1, одержуємо:

$$\mathrm{Re}\left[F_1^{\pm}(x)\right]=0.$$

Таким чином, з урахуванням умови (2.13) на $[c,a]$ одержана наступна комбінована крайова задача Діріхле – Рімана:

$$F_1^{+}(x)+\gamma_1 F_1^{-}(x)=iA,\ x\in[c,a], \tag{2.17}$$

$$\operatorname{Re} F_1^{\pm}(x) = 0,\ x \in (a,b), \tag{2.18}$$

з такою умовою на нескінченності:

$$F_1(z)\big|_{z\to\infty} = 0. \tag{2.19}$$

Для побудови розв'язку цієї задачі ведемо нову функцію $\Phi_1(z) = F_1(z) - \dfrac{iA}{1+\gamma_1}$. Тоді задача (2.17) – (2.19) приймає вигляд:

$$\Phi_1^+(x) + \gamma_1 \Phi_1^-(x) = 0, \tag{2.20}$$

$$\operatorname{Re} \Phi_1^{\pm}(x) = 0, \tag{2.21}$$

$$\Phi_1(z)\big|_{z\to\infty} = -\frac{iA}{1+\gamma_1}. \tag{2.22}$$

Введемо заміну: $\Phi_1(z) = i\omega_1(z)$ і враховуючи те, що $\operatorname{Re}\Phi_1(z) = \operatorname{Im}\omega_1(z)$ приходимо до задачі:

$$\omega_1^+(x) + \gamma_1 \omega_1^-(x) = 0,\ x \in [c,a], \tag{2.23}$$

$$\operatorname{Im} \omega_1^{\pm}(x) = 0,\ x \in (a,b), \tag{2.24}$$

$$\omega_1(z)\big|_{z\to\infty} = -\frac{A}{1+\gamma_1}. \tag{2.25}$$

Розв`язок даної задачі, одержаний аналогічно роботам [35], [85], у даному випадку має вигляд:

$$\omega_1(z) = P(z)X_1(z) + Q(z)X_2(z), \tag{2.26}$$

де

$$X_1(z) = \frac{ie^{i\varphi(z)}}{\sqrt{(z-c)(z-b)}}, \quad X_2(z) = \frac{e^{i\varphi(z)}}{\sqrt{(z-c)(z-a)}}, \tag{2.27}$$

$$\varphi(z) = 2\varepsilon \ln \frac{\sqrt{(b-a)(z-c)}}{\sqrt{(b-c)(z-a)} + \sqrt{(a-c)(z-b)}}, \tag{2.28}$$

$$P(z) = C_1 z + C_2, \quad Q(z) = D_1 z + D_2.$$

Довільні константи визначаються умовами на нескінченності і виражаються формулами:

$$C_1 = -\tilde{\sigma}\sin\beta, \qquad D_1 = \tilde{\sigma}\cos\beta,$$

$$C_2 = -\frac{c+b}{2}C_1 - \beta_1 D_1, \quad D_2 = \beta_1 C_1 - \frac{c+a}{2}D_1, \tag{2.29}$$

де $\tilde{\sigma} = -\dfrac{A}{1+\gamma_1}$, $\beta = 2\varepsilon \ln \dfrac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{b-c}+\sqrt{a-c}}$, $\beta_1 = \varepsilon\sqrt{(a-c)(b-c)}$.

Тоді

$$F_1(z) = i\omega_1(z) + \frac{iA}{1+\gamma_1}. \tag{2.30}$$

З формули (2.12) маємо:

$$[v'(x)] + im_1[u'(x)] = i\vartheta_1\left[\omega_1^+(x) + \gamma_1\omega_1^-(x) + A\right].$$

Приймаючи до уваги, що для $x > b$, $\omega_1^+(x) = \omega_1^-(x) = \omega(x)$, маємо:

$$\left[v'(x)\right] + im_1\left[u'(x)\right] = i\vartheta_1\left(1+\gamma_1\right)\omega_1\left(x\right) + i\vartheta_1 A.$$

Підставляючи далі вираз (2.26) і виконуючи перетворення, одержуємо:

$$\left[v'(x)\right] + im_1\left[u'(x)\right] = \vartheta_1(1+\gamma_1)\left[-\frac{P(x)}{\sqrt{x-b}} + i\frac{Q(x)}{\sqrt{x-a}}\right]\frac{e^{i\varphi(x)}}{\sqrt{x-c}} + i\vartheta_1 A. \quad (2.31)$$

Нескладний аналітичний аналіз показує, що при $b \to a$ формули (2.30), (2.31) зводяться до формул (2.14), (2.15) осциляційної моделі, що свідчить про правильність результатів, отриманих для контактної моделі.

Розглянемо далі визначення реальної довжини зони контакту, а також коефіцієнтів інтенсивності напружень у випадку температурного навантаження.

Рішення (2.26), (2.30) є математично коректним для будь-якого положення точки b. Однак воно буде фізично коректним, якщо будуть виконані наступні додаткові умови (1.69), які перепишемо тут для зручності:

$$\sigma_{22}^{(1)}(x,0) \le 0 \text{ для } x \in \left[a,b\right],$$

$$\left[v\left(x\right)\right] \ge 0 \quad \text{для } x \ge b.$$

З аналізу отриманого рішення випливає, що останні умови будуть виконані, якщо тріщина в точці b закривається плавно, тобто $\sqrt{x-b}\left[v'\left(x\right)\right]\Big|_{x\to b+0} \to 0$. Використовуючи в останньому виразі формулу (2.31), а також приймаючи до уваги, що $P\left(b\right) = 0$, приходимо до наступного рівняння:

$$\sin\beta + 2\varepsilon\sqrt{\frac{a-c}{b-c}}\cos\beta = 0. \qquad (2.32)$$

Позначаючи через $l = a - c$ довжину ділянки зчеплення, а через $\lambda = \frac{b-a}{l}$, як і раніше, відносну довжину зони контакту, з урахуванням формули (2.29) рівняння (2.32) запишемо у вигляді:

$$tg\beta = -\frac{2\varepsilon}{\sqrt{1+\lambda}}, \qquad (2.33)$$

де $\beta = 2\varepsilon \ln\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1+\lambda}+1}$.

Рівняння (2.33) є трансцендентним рівнянням для визначення відносної довжини області контакту λ. У випадку малих λ, вважаючи $1+\lambda \approx 1$, одержуємо $\beta \approx \varepsilon \ln\frac{\lambda}{4}$ і рівняння (2.33) допускає наступне наближене рішення:

$$\lambda_0 \approx \tilde{\lambda}_0 = 4\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left[arctg(-2\varepsilon) + k\pi\right]\right\},$$

де $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$

причому k потрібно вибирати так, щоб забезпечити виконання вищезазначених нерівностей.

Знайдемо тепер коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН), що визначають можливість розвитку тріщини. Як уже відзначалось, у випадку контактної моделі таким КІН є:

$$k_2 = \lim_{x \to a-0} \sqrt{2\pi(a-x)}\sigma_{12}^{(1)}(x,0). \tag{2.34}$$

З огляду на те, що для $x \in (c,a)$ $\omega_1(x) = -\gamma_1^{-1}\omega_1^+(x)$, з формули (2.11) одержуємо:

$$\sigma_{12}^{(1)}(x,0) + iS_1\sigma_{22}^{(1)}(x,0) = i\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1}\omega_1^+(x) \text{ для } x \in (c,a).$$

Тоді з урахуванням (2.26) вираз для k_2 можна записати так:

$$k_2 = \lim_{x \to a-0} \sqrt{2\pi(a-x)}\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}\operatorname{Re}\{iP(x)X_1(x) + iQ(x)X_2(x)\}. \tag{2.35}$$

Приймаючи далі до уваги формули (2.27), (2.28), одержуємо:

$$k_2 = \sqrt{2\pi}\frac{1+\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1(a-c)}}Q(a). \tag{2.36}$$

Підставляючи $Q(a)$ з формул (2.26), (2.29) і враховуючи рівняння (2.33), одержуємо:

$$k_2 = -\sqrt{\frac{2\pi}{\gamma_1(a-c)}}\frac{m_1}{\vartheta_1}\Delta_1'\left[\frac{a-c}{2}\cos\beta - \beta_1\sin\beta\right].$$

З урахуванням рівняння (2.33) і того, що $\sqrt{1+\lambda} = \sqrt{\frac{b-c}{a-c}}$ остаточно, шляхом нескладних перетворень, одержимо:

$$k_2 = -\sqrt{\frac{\pi(a-c)}{2\gamma_1}}\frac{m_1}{\vartheta_1}\Delta_l^t(1-4\varepsilon^2). \tag{2.37}$$

Таким чином, в якості розв'язку поставленої задачі одержані досить прості трансцендентне рівняння (2.33) і формула (2.37) для визначення КІН k_2.

2.2. Зовнішня міжфазна тріщина під дією температурного поля й зосереджених сил

2.2.1. Класична модель

Нехай ортотропні півплощини зчеплені на ділянці $c < x < a$, $y = 0$, а на іншій частині інтерфейсу $x < c$, $y = 0$ та $x > a$, $y = 0$ розташовані дві зовнішні тріщини (рис. 2.3).

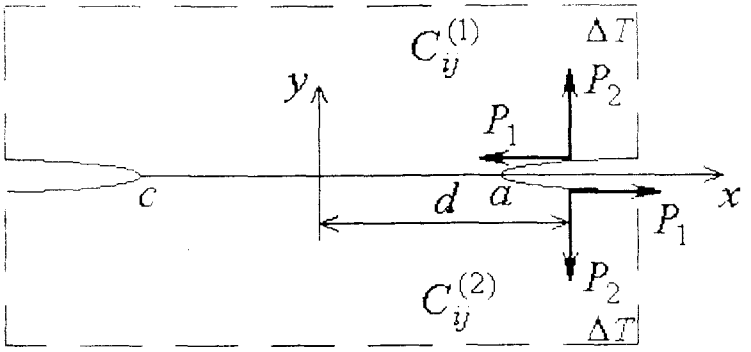

Рис. 2.3

Вважаємо також, що в точці $x = d$, $y = 0$ берегів правої тріщини діють зосереджені сили (P_1, P_2) і півплощини нагріті (охолоджені) на температуру ΔT у порівнянні з нормальною. Тоді умови на інтерфейсі для поставленої задачі мають вид:

$$u^+ = u^-,\ v^+ = v^-,\ \sigma_{12}^+ = \sigma_{12}^-,\ \sigma_{22}^+ = \sigma_{22}^-,\ \text{для } x \in (c, a), \tag{2.38}$$

$$\sigma_{12}^{\pm} = P_1 \delta(x - d),\ \sigma_{22}^{\pm} = -P_2 \delta(x - d), \qquad \text{для } x \notin (c, a). \tag{2.39}$$

У силу лінійності задачі, її розгляд може бути проведений для температурного та силового навантажень окремо, а розв'язок записано як сума отриманих рішень.

Таким чином в загальному випадку термомеханічного навантаження всі необхідні характеристики напружено-деформівного стану можна

знайти суперпозицією одержаних вище розв'язків температурної (п. 2.1.1) і механічної (п. 1.3) задач.

2.2.2. Дослідження зон контакту та відповідних КІН

Для усунення осцилюючої особливості розглянемо контактну модель правої тріщини. Введемо, як і раніше, поблизу її вершини a область гладкого контакту берегів (a,b) із заздалегідь невідомим положенням точки b (рис. 2.4).

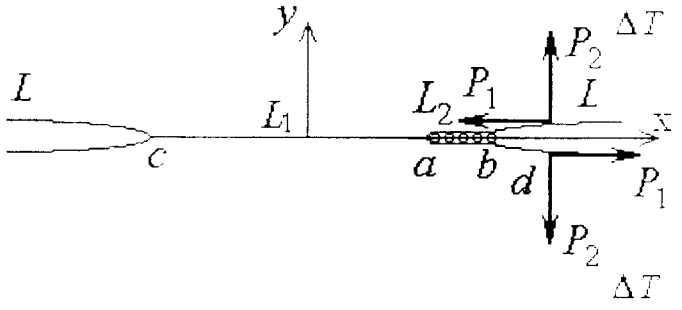

Рис. 2.4

Умови на інтерфейсі в цьому випадку включають співвідношення (2.38), (2.39), а також наступні граничні умови в зоні контакту:

$$\sigma_{12}^{\pm} = 0,\ [v] = 0,\ x \in (a,b) = L_2. \tag{2.40}$$

У випадку термомеханічного навантаження всі характеристики напружено-деформівного стану знаходяться суперпозицією одержаних вище розв'язків механічної і температурної задач, які для контактної моделі представлені в п. 1.4 та п. 2.1.2, відповідно.

Зокрема, довжина зони контакту у випадку термомеханічного навантаження визначається з рівняння:

$$\sqrt{x-b}\left[\left[v'(x)\right]^{тем} + \left[v'(x)\right]^{сил}\right]\Big|_{x\to b+0} \to 0,$$

яке можна записати у вигляді:

$$\frac{\vartheta_1(1+\gamma_1)}{\sqrt{c-b}}P(b)+\frac{\vartheta_1(1+\gamma_1)}{2\pi\sqrt{(b-c)(d-b)(d-a)}}\operatorname{Im}\left[\frac{P_1-iS_1P_2}{X_2^-(d)}\right]=0, \qquad (2.41)$$

де $P(b)=-\tilde{\sigma}\left[\sqrt{b-c}\sin\beta+2\varepsilon\sqrt{a-c}\cos\beta\right]$.

Позначаючи через $\chi=\dfrac{a-c}{d-c}$ та спрощуючи останнє рівняння, одержуємо рівняння для знаходження відносної довжини зони контакту λ для температурного та силового навантажень у вигляді:

$$A\left\{\sin\beta+\frac{2}{\sqrt{1+\lambda}}\varepsilon\cos\beta\right\}+\frac{1+\gamma_1}{2\pi\sqrt{(a-c)(1+\lambda)(1-(1+\lambda)\chi)}}\times$$
$$\times\left\{-S_1P_2\cos\varphi(d)-P_1\sin\varphi(d)\right\}=0. \qquad (2.42)$$

Розв'язок рівняння (2.42) може бути знайдений чисельно, а відповідний КІН k_2 визначається як сума КІН (2.37) та (1.74).

2.3. Аналіз результатів та висновки

Проведемо чисельний аналіз аналітичних розв'язків отриманих для термопружної задачі в попередніх параграфах цього розділу.

На рис. 2.5 для $c=-1м$, $a=1м$, $d=1.5м$, $\Delta T=100°C$, $P_1=0$ приведені значення відносних довжин області контакту λ_0 в залежності від величини P_2, а на рис. 2.6 для тих же значень c, a, d і $P_2=10^7\frac{H}{м}$, $P_1=0$ приведені залежності λ_0 від величини ΔT.

Вибиралися ті ж біматеріали, що й в розділі 1, тобто:

Біматеріал I: $\mu^{(1)}=33.45\cdot10^9\frac{H}{м^2}$, $\upsilon^{(1)}=0.32$ (алюміній),

$\mu^{(2)}=75.75\cdot10^9\frac{H}{м^2}$, $\upsilon^{(2)}=0.32$ (мідь), $\gamma=0.814$, $\varepsilon=-0.033$,

$\alpha_{11}^{(1)}=125\cdot10^{-7}$ град$^{-1}$, $\alpha_{11}^{(2)}=165\cdot10^{-7}$ град$^{-1}$.

Біматеріал II: $C_{11}^{(1)}=26.6C_{66}^{(1)}$, $C_{12}^{(1)}=3.15C_{66}^{(1)}$, $C_{22}^{(1)}=3.6C_{66}^{(1)}$, $C_{66}^{(1)}=33.45\cdot10^9$,

$C_{11}^{(2)}=26.6C_{66}^{(2)}$, $C_{12}^{(2)}=3.15C_{66}^{(2)}$, $C_{22}^{(2)}=3.6C_{66}^{(2)}$, $C_{66}^{(2)}=75.75\cdot10^9$

(комбінація ортотропних матеріалів), $\gamma=0.848$, $\varepsilon=-0.026$,

$\alpha_{11}^{(1)}=114\cdot10^{-7}$ град$^{-1}$, $\alpha_{11}^{(2)}=154\cdot10^{-7}$ град$^{-1}$.

Біматеріал III: $\mu^{(1)}=33.45\cdot10^9\frac{H}{м^2}$, $\upsilon^{(1)}=0.02$,

$\mu^{(2)}=1000\cdot\mu^{(1)}$, $\upsilon^{(2)}=0.3$, $\gamma=0.343$, $\varepsilon=-0.17$,

$\alpha_{11}^{(1)}=125\cdot10^{-7}$ град$^{-1}$, $\alpha_{11}^{(2)}=165\cdot10^{-7}$ град$^{-1}$.

Криві I, II, III на рис. 2.5 і 2.6 побудовані для біматеріалів I, II, III відповідно.

У табл. 2.1 для тих же значень c, a, d, $\Delta T=100°C$, $P_1=-P_2$ приведені значення відносних довжин області контакту λ_0 в залежності від величини P_2.

У табл. 2.2 для тих же значень c, a, d, $P_2 = 10^7 \frac{H}{м}$, $P_1 = -P_2$ приведені значення відносних довжин області контакту λ_0 в залежності від величини ΔT.

Стовбці I, II, III у табл. 2.1 і 2.2 позначають біматеріали I, II, III відповідно.

На рис. 2.7 приведені значення нормованих КІН $\frac{k_2}{k_{20}}$, що відповідають значенням вхідних параметрів і зон контакту з рис. 2.5, а на рис. 2.8 приведені значення КІН $\frac{k_2}{k_{20}}$, відповідні рис. 2.6. При цьому величина k_{20} для рис. 2.7 і рис. 2.8 дорівнює $76.2 \frac{H}{м^{3/2}}$ і $36.6 \frac{H}{м^{3/2}}$, відповідно.

Із отриманих результатів видно, що зона контакту і відповідне зсувне напруження суттєво залежать від температури. При цьому з аналізу останніх рядків таблиці 2.2, а також результатів, отриманих для інших значень коефіцієнтів P_1 / P_2 випливає, що при значному температурному полі довжини зон контакту зближуються прямуючи до одного й того ж значення, що відповідає чисто температурному навантаженню і визначається коренями рівняння (2.33). Такий же висновок справедливий і стосовно зсувного напруження.

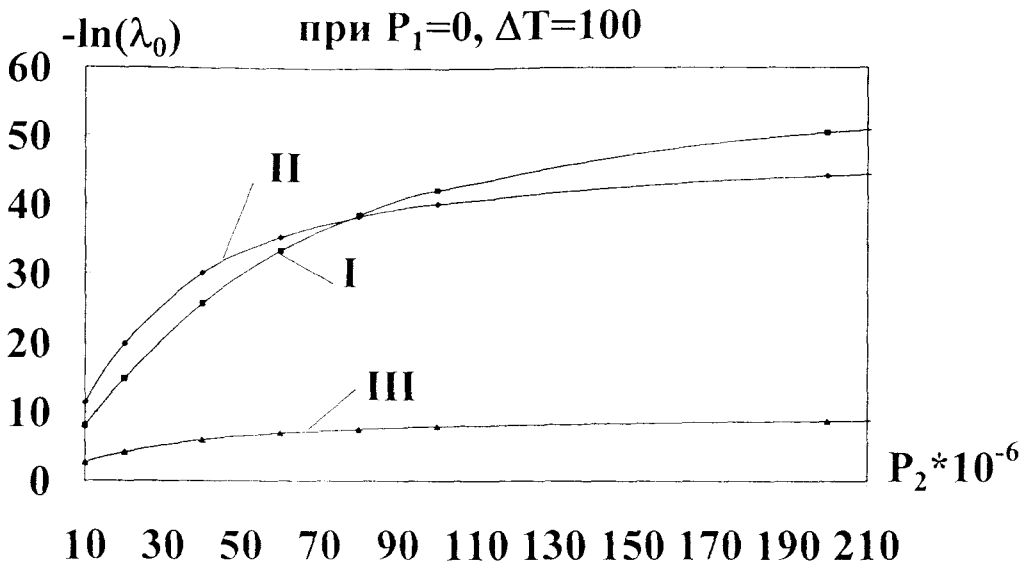
-ln(λ0)
при P1=0, ΔT=100
60
50
40
30
20
10
0
II
I
III
P2*10-6
10 30 50 70 90 110 130 150 170 190 210

Рис. 2.5

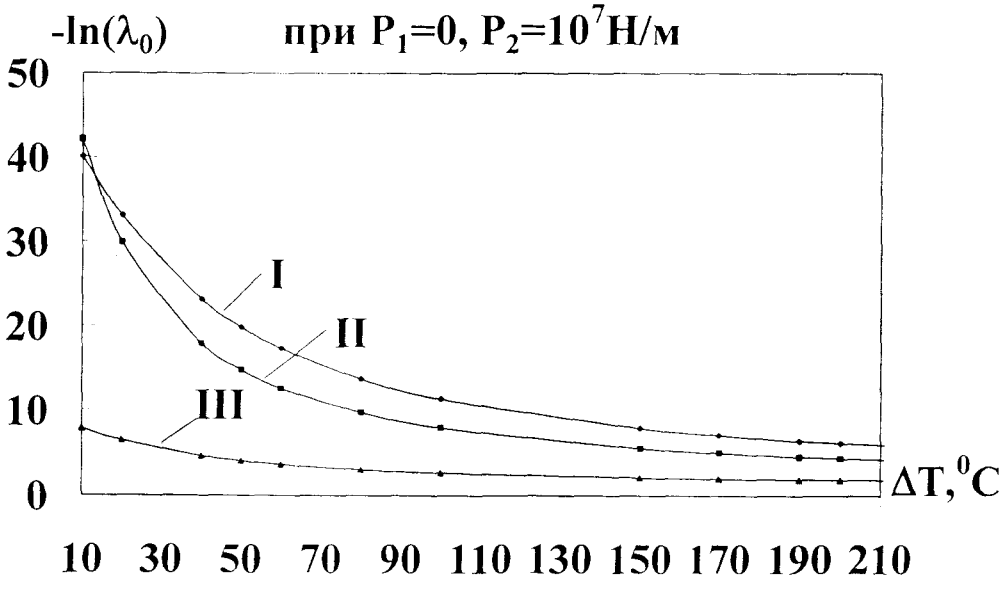
-ln(λ0)
при P1=0, P2=107Н/м
50
40
30
20
10
0
I
II
III
ΔT,0C
10 30 50 70 90 110 130 150 170 190 210

Рис. 2.6

Таблиця 2.1

Залежності відносних довжин області контакту λ_0 від величини P_2 при $\Delta T = 100°C$ і $P_1 = -P_2$

$P_2, \frac{H}{м}$	I	II	III
10^7	$2.01\cdot10^{-4}$	$7.73\cdot10^{-4}$	$1.13\cdot10^{-1}$
$2\cdot10^7$	$3.2\cdot10^{-6}$	$5.15\cdot10^{-6}$	$6.0\cdot10^{-2}$
$4\cdot10^7$	$5.4\cdot10^{-8}$	$5.6\cdot10^{-9}$	$3.04\cdot10^{-2}$
$6\cdot10^7$	$7.5\cdot10^{-9}$	$8.03\cdot10^{-11}$	$2.16\cdot10^{-2}$
$8\cdot10^7$	$2.37\cdot10^{-9}$	$4.74\cdot10^{-12}$	$1.75\cdot10^{-2}$
10^8	$1.11\cdot10^{-9}$	$6.41\cdot10^{-13}$	$1.53\cdot10^{-2}$
$2\cdot10^8$	$2.09\cdot10^{-10}$	$5.0\cdot10^{-15}$	$1.13\cdot10^{-2}$
$4\cdot10^8$	$8.3\cdot10^{-11}$	$2.67\cdot10^{-16}$	$9.47\cdot10^{-3}$
$6\cdot10^8$	$6.01\cdot10^{-11}$	$9.25\cdot10^{-17}$	$8.91\cdot10^{-3}$
$8\cdot10^8$	$5.11\cdot10^{-11}$	$5.36\cdot10^{-17}$	$8.64\cdot10^{-3}$
10^9	$4.62\cdot10^{-11}$	$3.84\cdot10^{-17}$	$8.48\cdot10^{-3}$

Таблиця 2.2

Залежності відносних довжин області контакту λ_0 від величини ΔT при $P_2 = 10^7 \frac{H}{м}$ і $P_1 = -P_2$

$\Delta T, °C$	I	II	III
20	$1.73\cdot10^{-8}$	$5.32\cdot10^{-10}$	$2.5\cdot10^{-2}$
40	$8.08\cdot10^{-7}$	$6.65\cdot10^{-7}$	$4.8\cdot10^{-2}$
50	$3.2\cdot10^{-6}$	$5.15\cdot10^{-6}$	$6.0\cdot10^{-2}$
60	$9.9\cdot10^{-6}$	$2.37\cdot10^{-5}$	$7.18\cdot10^{-2}$
80	$5.64\cdot10^{-5}$	$1.95\cdot10^{-4}$	$9.38\cdot10^{-2}$
100	$2.01\cdot10^{-4}$	$7.73\cdot10^{-4}$	$1.13\cdot10^{-1}$
150	$1.55\cdot10^{-3}$	$5.56\cdot10^{-3}$	$1.51\cdot10^{-1}$
170	$2.68\cdot10^{-3}$	$9.02\cdot10^{-3}$	$1.63\cdot10^{-1}$
190	$4.21\cdot10^{-3}$	$1.33\cdot10^{-2}$	$1.72\cdot10^{-1}$
200	$5.12\cdot10^{-3}$	$1.56\cdot10^{-2}$	$1.77\cdot10^{-1}$
300	$1.92\cdot10^{-2}$	$4.48\cdot10^{-2}$	$2.06\cdot10^{-1}$

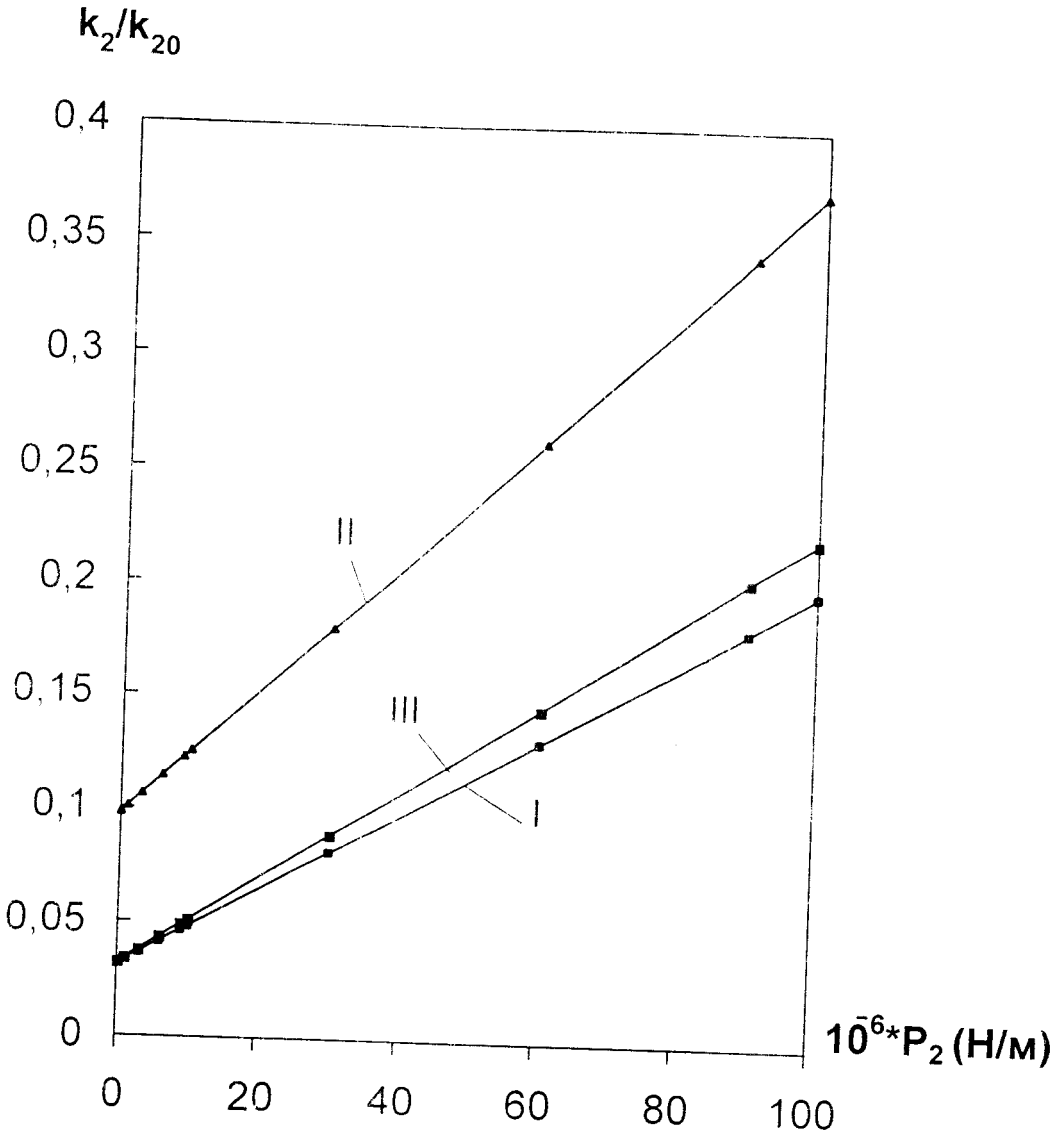
k2/k20
0,4
0,35
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
II
III
I
0
20
40
60
80
100
10-6*P2 (Н/м)

Рис. 2.7

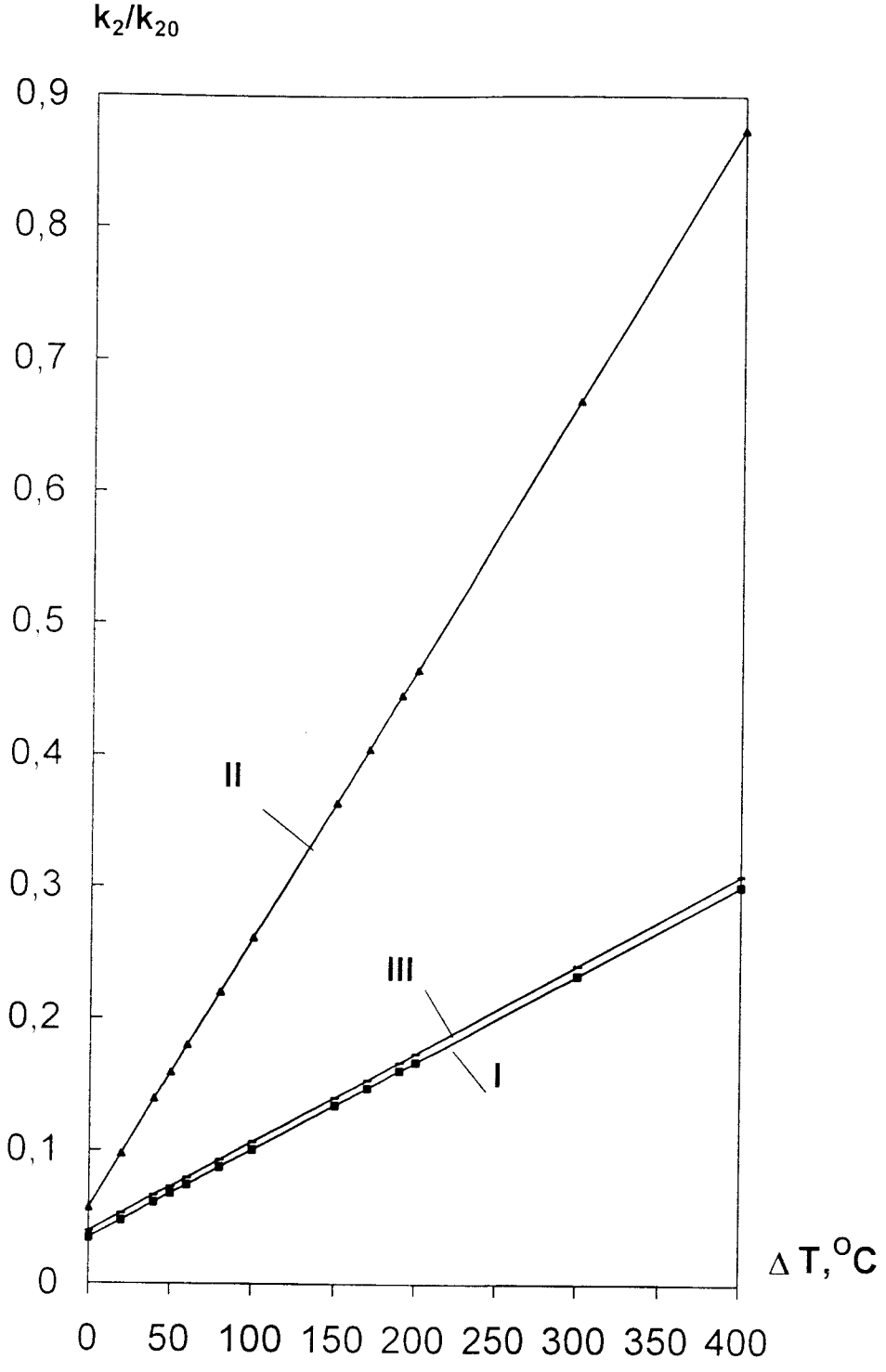
k2/k20
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
II
III
I
Δ T,°C
0 50 100 150 200 250 300 350 400

Рис. 2.8

ВИСНОВКИ

В другому розділі розглянута зовнішня міжфазна тріщина в біматеріальному просторі під дією температурного поля. Проведений аналіз класичної та контактної моделі цієї задачі. Також вивчена зовнішня міжфазна тріщина під дією температурного поля й зосереджених сил в класичній та контактній постановці. Враховано вплив температурного поля на довжину зони контакту і відповідні коефіцієнти інтенсивності зсувного напруження. Одержано трансцендентне рівняння для визначення довжини зони контакту як для чисто температурної задачі так і для термопружної задачі, а також знайдені явні вирази для напружень і їх коефіцієнтів інтенсивності. Проведений чисельний аналіз одержаних розв'язків. Досліджені залежності величин зон контакту і КІН від навантаження і термопружних характеристик матеріалу.

РОЗДІЛ 3

Аналіз зовнішньої міжфазної тріщини в п'єзоелектричному *матеріалі*

3.1. Основні співвідношення електропружності для п'єзоелектричного матеріалу

В різних областях машинобудування, автоматики, обчислювальної техніки важливе прикладне значення мають функціональні елементи, основані на використанні п'єзоелектриків. П'єзоелектрики – це матеріали, в яких виникає таке явище як п'єзоефект. Воно характеризується тим, що при деформуванні кристалів деяких кристалографічних класів на їх поверхнях з'являються електричні заряди, пропорційні деформації. Має місце також і протилежна ситуація, пов'язана з виникненням деформації під дією електричного поля. Характерною особливістю п'єзоефекту являється його зв'язок з властивостями кристалічної решітки і, як наслідок, з симетрією кристалу.

На початку 50-х років XX сторіччя були створені штучні п'єзоелектричні матеріали, які представляли собою полікристалічний твердий розчин монокристалів, вектор поляризації яких орієнтований сильним зовнішнім електричним полем. Такі матеріали звичайно називаються п'єзокераміками. Так як вони мали кращі властивості в порівнянні з традиційними монокристалами, п'єзокераміка стала одним з основних матеріалів для конструювання п'єзоелементів різного призначення.

Для стаціонарних процесів при відсутності масових сил та вільних зарядів визначальні співвідношення для лінійних п'єзоелектричних матеріалів на основі співвідношень [4, 42] можна представити у вигляді:

$$\Pi_{iJ} = E_{iJKl} V_{K,l}, \; \Pi_{iJ,i} = 0, \tag{3.1}$$

де

$$V_K = \begin{cases} u_k, \text{ K=1,2,3} \\ \varphi, \text{ K=4} \end{cases}, \tag{3.2}$$

$$\Pi_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij}, \ i,J = 1,2,3 \\ D_i, \ i = 1,2,3; J = 4 \end{cases}, \tag{3.3}$$

$$E_{iJKl} = \begin{cases} C_{ijkl}, \ J,K = 1,2,3 \\ e_{lij}, \ J = 1,2,3; \ K = 4 \\ e_{ikl}, \ K = 1,2,3; \ J = 4 \\ -\varepsilon_{il}, \ \text{J= K=4} \end{cases}. \tag{3.4}$$

В співвідношеннях (3.2) – (3.3) u_k, φ, σ_{ij}, D_i – пружні переміщення, електричний потенціал, напруження та електричні зміщення, відповідно. В співвідношенні (3.4) C_{ijki}, e_{lij}, ε_{ij} – пружні модулі, п'єзоелектричні та діелектричні константи, відповідно.

В вище написаних співвідношеннях маленькі індекси змінюються від 1 до 3, великі індекси змінюються від 1 до 4. Має місце також сумування по повторним індексам.

Припускаючи, що всі компоненти не залежать від координати x_2, розв'язок рівнянь (3.1) згідно методу запропонованому у [80], може бути подано у вигляді [101]:

$$\boldsymbol{V} = a\boldsymbol{f}(z), \tag{3.5}$$

де $z = x_1 + px_3$, $\mathbf{V} = [u_1, u_2, u_3, \varphi]^T$, $\boldsymbol{f}$ – довільна чотирьох компонентна вектор-функція.

Вектор $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$ може бути знайдений із співвідношення:

$$\left[\boldsymbol{M}+p\left(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}^{T}\right)+p^{2}\boldsymbol{T}\right]\boldsymbol{a}=0. \tag{3.6}$$

Елементи матриць $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{T}$ розмірності 4×4 визначені як:

$$M_{JK}=E_{1JK1},\ R_{JK}=E_{1JK3},\ T_{JK}=E_{3JK3}. \tag{3.7}$$

Нетривіальний розв'язок системи рівнянь (3.6) існує, якщо p є коренем рівняння:

$$\det\left[\boldsymbol{M}+p\left(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}^{T}\right)+p^{2}\boldsymbol{T}\right]=0. \tag{3.8}$$

Оскільки рівняння (3.8) має уявні корені [109], позначимо корені (3.8) з додатними уявними частинами як p_α, а власні вектори системи як $\boldsymbol{a}_\alpha$, де індекс $\alpha=1,2,3,4$.

Найбільш загальний розв'язок рівнянь (3.1) може бути представлений як [109]:

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(z)+\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{f}}(\bar{z}), \tag{3.9}$$

де $\boldsymbol{A}=\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\right]$ – матриця, стовпцями якої є власні вектори системи (3.6), $\boldsymbol{f}(z)=\left[f_1(z_1),f_2(z_2),f_3(z_3),f_4(z_4)\right]^T$ – довільна вектор-функція комплексної змінної $z_\alpha=x_1+p_\alpha x_3$.

Вводячи вектор:

$$\mathbf{t}=\left[\sigma_{31},\sigma_{32},\sigma_{33},D_3\right]^T \tag{3.10}$$

та використовуючи перше співвідношення з (3.1), цей вектор може бути записаний у вигляді:

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}'(z) + \overline{\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}}'(\bar{z}), \tag{3.11}$$

де $B_{KI} = \left(E_{3KJ1} + p_L E_{3KJ3}\right) A_{JL}$, (3.12)

та $\boldsymbol{f}'(z) = \left[\dfrac{df_1(z_1)}{dz_1}, \dfrac{df_2(z_2)}{dz_2}, \dfrac{df_3(z_3)}{dz_3}, \dfrac{df_4(z_4)}{dz_4}\right]^T$. (3.13)

Розглянемо тепер біматеріальний простір, складений з двох різних анізотропних п'єзоелектричних півпросторів $x_3 > 0$ та $x_3 < 0$, з властивостями визначеними матрицями $E^{(1)}_{iJKl}$ і $E^{(2)}_{iJKl}$ відповідно. Поперечний переріз такого композиту, ортогональний до осі x_2, зображено на рис. 3.1.

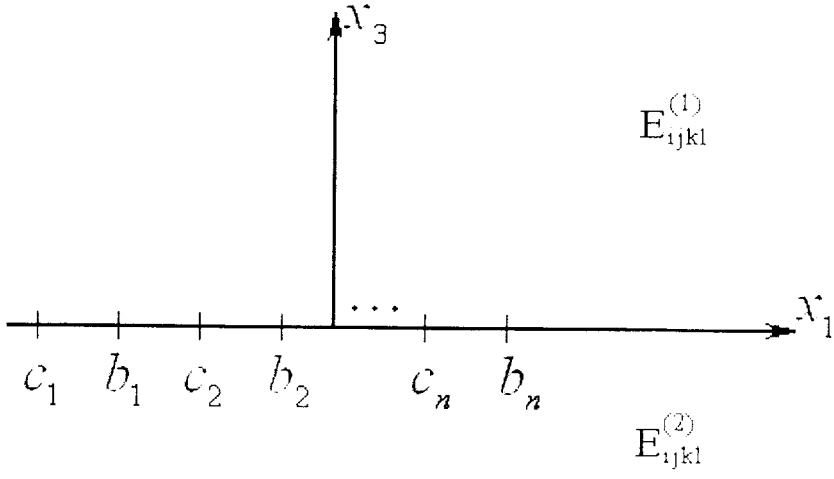

Рис. 3.1

Будемо вважати, що вектор **t** є неперервним вздовж усього інтерфейсу, а частина $\tilde{L} = \{(-\infty; c_1) \cup (b_1; c_2) \cup \ldots (b_n; \infty)\}$ інтерфейсу $-\infty < x_1 < \infty$, $x_3 = 0$ знаходиться в умовах ідеального електромеханічного контакту. Тобто:

$$\boldsymbol{t}^{(1)}(x_1,0)=\boldsymbol{t}^{(2)}(x_1,0) \text{ для } x_1\in(-\infty;\infty), \tag{3.14}$$

$$\boldsymbol{V}^{(1)}(x_1,0)=\boldsymbol{V}^{(2)}(x_1,0) \text{ для } x_1\in\tilde{L}. \tag{3.15}$$

У цьому випадку згідно рівнянням (3.9) та (3.11) розв'язок рівнянь (3.1) може бути записаний для кожної області у вигляді:

$$\boldsymbol{V}^{(j)}(x_1,x_3)=\boldsymbol{A}^{(j)}\boldsymbol{f}^{(j)}(z)+\overline{\boldsymbol{A}}^{(j)}\overline{\boldsymbol{f}}^{(j)}(\overline{z}), \tag{3.16}$$

$$\boldsymbol{t}^{(j)}(x_1,x_3)=\boldsymbol{B}^{(j)}\boldsymbol{f}'^{(j)}(z)+\overline{\boldsymbol{B}}^{(j)}\overline{\boldsymbol{f}}'^{(j)}(\overline{z}), \tag{3.17}$$

де $j=1$ для $x_3>0$ та $j=2$ для $x_3<0$; вектор-функції $\boldsymbol{f}^{(1)}(z)$ та $\boldsymbol{f}^{(2)}(z)$ – аналітичні у верхній ($x_3>0$) та нижній ($x_3<0$) півплощинах, відповідно.

Використовуючи (3.17), та граничну умову (3.14), маємо:

$$\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{f}'^{(1)}(x_1)-\overline{\boldsymbol{B}}^{(2)}\overline{\boldsymbol{f}}'^{(2)}(x_1)=\boldsymbol{B}^{(2)}\boldsymbol{f}'^{(2)}(x_1)-\overline{\boldsymbol{B}}^{(1)}\overline{\boldsymbol{f}}'^{(1)}(x_1),\quad -\infty<x_1<\infty. \tag{3.18}$$

Ліва частини рівняння (3.18) є граничним значенням аналітичної функції в області $x_3>0$, а права частина рівняння (3.18) є також граничним значенням аналітичної функції в області $x_3<0$.

Співвідношення (3.18) показує, що обидві функції можуть бути аналітично продовжені на цілу площину. Таким чином вони рівні для $x_3>0$ та $x_3<0$, відповідно, деякій функції $\boldsymbol{M}(z)$ аналітичній у цілій площині.

Приймаючи до уваги, що напруження обмежені на нескінченності, з рівняння (3.17) маємо:

$$\boldsymbol{M}(z)\big|_{z\to\infty}=\boldsymbol{M}^{(0)}=const,$$

де $\boldsymbol{M}^{(0)}$ - довільний постійний вектор.

Співвідношення $\boldsymbol{M}(z)=\boldsymbol{M}^{(0)}$ справедливе у всій площині. З цього випливає, що з співвідношення (3.18) маємо:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{f}'^{(1)}(z)-\overline{\boldsymbol{B}}^{(2)}\overline{\boldsymbol{f}}'^{(2)}(\overline{z})=\boldsymbol{M}^{(0)}, \quad x_3>0, \\ &\boldsymbol{B}^{(2)}\boldsymbol{f}'^{(2)}(z)-\overline{\boldsymbol{B}}^{(1)}\overline{\boldsymbol{f}}'^{(1)}(\overline{z})=\boldsymbol{M}^{(0)}, \quad x_3<0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Приймаючи до уваги, що власне значення знайдене, та враховуючи, що матриці у співвідношенні (3.19) не сингулярні, маємо:

$$\begin{aligned} &\overline{\boldsymbol{f}}'^{(2)}(\overline{z})=\left(\overline{\boldsymbol{B}}^{(2)}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{f}'^{(1)}(z)-\left(\overline{\boldsymbol{B}}^{(2)}\right)^{-1}\boldsymbol{M}^{(0)}, \; x_3>0, \\ &\overline{\boldsymbol{f}}'^{(1)}(\overline{z})=\left(\overline{\boldsymbol{B}}^{(1)}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{(2)}\boldsymbol{f}'^{(2)}(z)-\left(\overline{\boldsymbol{B}}^{(1)}\right)^{-1}\boldsymbol{M}^{(0)}, \; x_3<0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Оскільки $\boldsymbol{f}'^{(1)}(z)$ і $\boldsymbol{f}'^{(2)}(z)$ довільні функції, то вибираючи $\boldsymbol{M}^{(0)}=0$, одержуємо рівняння (3.20) у вигляді:

$$\begin{aligned} &\overline{\boldsymbol{f}}'^{(2)}(\overline{z})=\left(\overline{\boldsymbol{B}}^{(2)}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{f}'^{(1)}(z), \; x_3>0, \\ &\overline{\boldsymbol{f}}'^{(1)}(\overline{z})=\left(\overline{\boldsymbol{B}}^{(1)}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{(2)}\boldsymbol{f}'^{(2)}(z), \; x_3<0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Вводячи наступний вектор:

$$\left[\boldsymbol{V}'(x_1)\right]=\boldsymbol{V}'^{(1)}(x_1,0)-\boldsymbol{V}'^{(2)}(x_1,0) \tag{3.22}$$

та приймаючи до уваги співвідношення (3.16) та (3.21), похідна від вектора стрибка переміщень та електричного потенціалу через інтерфейс може бути записана у вигляді:

$$\left[\boldsymbol{V}'(x_1)\right]=\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}'^{(1)}(x_1)+\overline{\boldsymbol{D}}\overline{\boldsymbol{f}}'^{(1)}(x_1), \tag{3.23}$$

де $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}^{(1)} - \bar{\boldsymbol{A}}^{(2)}\left(\bar{\boldsymbol{B}}^{(2)}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{(1)}$.

Тоді на основі співвідношення (3.17), вектор $\boldsymbol{t}^{(1)}$ на міжфазній границі може бути записаний наступним чином:

$$\boldsymbol{t}^{(1)}(x_1,0) = \boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{f}'^{(1)}(x_1) + \bar{\boldsymbol{B}}^{(1)}\bar{\boldsymbol{f}}'^{(1)}(x_1). \tag{3.24}$$

Введемо вектор-функцію $\boldsymbol{W}(z)$ за формулою:

$$\boldsymbol{W}(z) = \begin{cases} \boldsymbol{D}\boldsymbol{N}(z), \ x_3 > 0, \\ -\bar{\boldsymbol{D}}\bar{\boldsymbol{N}}(z), \ x_3 < 0, \end{cases} \tag{3.25}$$

де $\boldsymbol{N}(z) = \left[f_1'^{(1)}(z), f_2'^{(1)}(z), f_3'^{(1)}(z), f_4'^{(1)}(z)\right]^T$.

Тоді отримаємо наступні формули для похідної від переміщень та вектора напружень:

$$\left[\boldsymbol{V}'(x_1)\right] = \boldsymbol{W}^+(x_1) - \boldsymbol{W}^-(x_1), \tag{3.26}$$

$$\boldsymbol{t}^{(1)}(x_1,0) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{W}^+(x_1) - \bar{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{W}^-(x_1), \tag{3.27}$$

де $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{D}^{-1}$, $\boldsymbol{W}^+(x_1) = \boldsymbol{W}(x_1 + i0)$, $\boldsymbol{W}^-(x_1) = \boldsymbol{W}(x_1 - i0)$.

Зі співвідношень (3.25), (3.26) та (3.15) випливає, що вектор-функція $\boldsymbol{W}(z)$ аналітична у кожній півплощині включаючи зчеплені ділянки інтерфейсу $\tilde{L}$.

Представлення (3.26), (3.27) є дуже зручними для розв'язання різних змішаних задач для п'єзоелектричного біматеріалу шляхом зведення їх до задач лінійного спряження Гілберта чи Діріхле – Рімана.

Далі будемо розглядати п'єзоелектричні матеріали гексагонального класу симетрії $6mm$, котрі мають велике практичне значення – це так звана поляризована кераміка. В цьому випадку для усіх полів, які незалежні від координати x_2, переміщення V_2 вектор-функції $\boldsymbol{V}$ стає незалежним у площині (x_1, x_3) – від компонент (V_1, V_3, V_4). Приймаючи до уваги, що знаходження V_2 зводиться до розв'язування досить простої антиплоскої задачі, нашу увагу зосередимо на плоскій задачі відносно компонент (V_1, V_3, V_4).

В цьому випадку згідно з [42] введемо такі позначення:

$$E_{1111} = C_{11},\ E_{1133} = C_{13},\ E_{3333} = C_{33},\ E_{1313} = C_{44},\ E_{1143} = e_{31},\ E_{3343} = e_{33},$$

$$E_{1341} = e_{15},\ E_{1441} = -\varepsilon_{11},\ E_{3443} = -\varepsilon_{33}.$$

Таким чином, рівняння (3.6) можуть бути переписані у наступному розгорнутому вигляді:

$$\begin{bmatrix} C_{11} + C_{44}p^2 & (C_{13} + C_{44})p & (e_{31} + e_{15})p \\ (C_{13} + C_{44})p & C_{44} + C_{33}p^2 & e_{15} + e_{33}p^2 \\ (e_{31} + e_{44})p & e_{15} + e_{33}p^2 & -\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}p^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = 0, \qquad (3.28)$$

а для відповідних власних значень з додатною уявною частиною, маємо:

$p_{1,3} = \pm\omega_1 + i\omega_2$, $p_4 = i\omega_3$, де ω_k $(k = 1,2,3)$ - дійсні.

Компоненти матриці $\boldsymbol{B}$ мають вигляд:

$$b_{1j} = C_{44}\left(a_{1j}p_j + a_{3j}\right) + e_{15}a_{4j},$$

$$b_{3j} = C_{13}a_{1j} + C_{33}p_j a_{3j} + e_{33}p_j a_{4j},$$

$$b_{4j} = e_{31}a_{1j} + e_{33}p_j a_{3j} - \varepsilon_{33}p_j a_{4j},$$

де $j = 1,3,4$, а $\left[a_{1k}, a_{3k}, a_{4k}\right]^T = a_k$ (k=1,3,4) – власні вектори системи (3.28).

Біматеріальна матриця **G** розміром 3×3 визначається через знайдені для кожного матеріалу матриці $A^{(m)}$ і $B^{(m)}$ (m=1,2) за отриманими вище формулами:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}^{(1)} - \overline{\boldsymbol{A}}^{(2)}\left(\overline{\boldsymbol{B}}^{(2)}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{(1)},\ \boldsymbol{G} = \boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{D}^{-1}$$

і має наступну структуру:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{13} & G_{14} \\ G_{31} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ig_{11} & g_{13} & g_{14} \\ g_{31} & ig_{33} & ig_{34} \\ g_{41} & ig_{43} & ig_{44} \end{bmatrix},$$

причому, як показує чисельний аналіз, всі g_{ij} для п'єзоелектричних матеріалів гексагонального класу симетрії $6mm$, дійсні.

Співвідношення (3.26), (3.27), в яких матриця **G** має вищевідзначені властивості, є досить зручними для формулювання задач лінійного спряження при конкретних умовах на лінії поділу матеріалів, зокрема при дослідженні міжфазних тріщин з зонами контакту.

3.2. Зовнішня електро-проникна тріщина в п'єзоелектричному біматеріалі

3.2.1. Постановка задачі. Аналіз осциляційної моделі

Розглядаються дві різнорідні п'єзоелектричні півплощини $x_3 \geq 0$ і $x_3 \leq 0$ з характеристиками $E_{ijkl}^{(1)}$ і $E_{ijkl}^{(2)}$ відповідно, які жорстко зчеплені по відрізку (c,a) лінії поділу матеріалів (інтерфейсу). На частині інтерфейсу, що залишилась, мають місце дві зовнішні тріщини $x_1 < c$ та $x_1 > a$ (рис. 3.2).

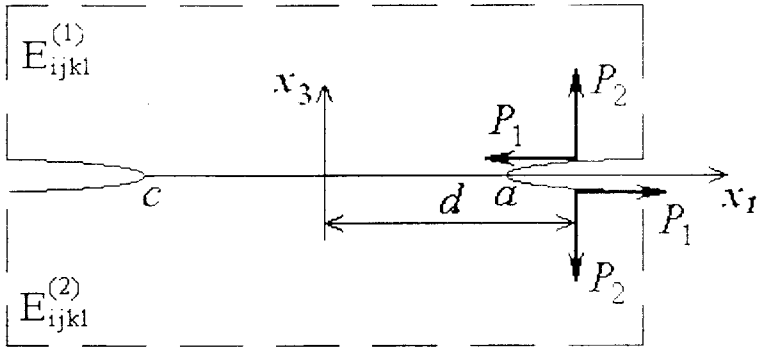

Рис. 3.2

Умови на інтерфейсі мають вигляд:

$$u_1^+ = u_1^-,\ u_3^+ = u_3^-,\ \sigma_{13}^+ = \sigma_{13}^-,\ \sigma_{33}^+ = \sigma_{33}^-,\ \varphi^+ = \varphi^-,\ D_3^+ = D_3^-,\ x_1 \in (c,a), \quad (3.29)$$

$$\sigma_{13}^{\pm} = P_1\delta(x_1 - d),\ \sigma_{33}^{\pm} = -P_2\delta(x_1 - d),\ \varphi^+ = \varphi^-,\ D_3^+ = D_3^-,\ x_1 \notin (c,a). \quad (3.30)$$

Введемо нові вектори:

$$\mathbf{S}(x_1) = \left\{[u_1'(x_1)],[u_3'(x_1)],D_3^{(1)}(x_1,0)\right\}^T,\ \mathbf{P}(x_1) = \left\{\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0),\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0),[\varphi'(x_1)]\right\}^T,$$

тоді на основі (3.26), (3.27) маємо:

$$\mathbf{S}(x_1) = \mathbf{M}\mathbf{W}^+(x_1) - \overline{\mathbf{M}}\mathbf{W}^-(x_1), \tag{3.31}$$

$$\mathbf{P}(x_1) = \mathbf{N}\mathbf{W}^+(x_1) - \overline{\mathbf{N}}\mathbf{W}^-(x_1), \tag{3.32}$$

де

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ G_{41} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix}, \ \mathbf{N} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{13} & G_{14} \\ G_{31} & G_{33} & G_{34} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вводячи нову вектор-функцію:

$$\mathbf{R}(z) = \begin{cases} \mathbf{N}\mathbf{W}(z), x_3 > 0 \\ \overline{\mathbf{N}}\mathbf{W}(z), x_3 < 0 \end{cases}, \ \mathbf{R}(z) = \{R_1(z), R_3(z), R_4(z)\}^T,$$

отримаємо:

$$\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{R}^+(x_1), \ \mathbf{W}^-(x_1) = \overline{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{R}^-(x_1).$$

Тоді з (3.31) і (3.32) маємо:

$$\mathbf{P}(x_1) = \mathbf{R}^+(x_1) - \mathbf{R}^-(x_1), \tag{3.33}$$

$$\mathbf{S}(x_1) = \mathbf{Q}\mathbf{R}^+(x_1) - \overline{\mathbf{Q}}\mathbf{R}^-(x_1), \tag{3.34}$$

де $\mathbf{Q} = \mathbf{M}\mathbf{N}^{-1}$,

причому матриця $\mathbf{Q}$ має таку структуру:

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} iq_{11} & q_{13} & q_{14} \\ q_{31} & iq_{33} & q_{34} \\ q_{41} & iq_{43} & iq_{44} \end{bmatrix}$$

і, як показує аналіз, всі q_{ij} – дійсні.

З (3.33) видно, що $\mathbf{R}(z)$ аналітична на тих ділянках інтерфейсу, на яких $\mathbf{P}(x_1)=0$.

З огляду на те, що $[\varphi']\equiv 0$, з III співвідношення (3.33) маємо: $R_4^+(x_1)-R_4^-(x_1)\equiv 0$ для $x_1\in(-\infty;+\infty)$. Звідси випливає, що $R_4(z)\equiv R_4^0=const$. Однак, оскільки на нескінченності усі фактори рівні нулю, то $R_4^0=0$.

Запишемо співвідношення (3.34) в розгорнутому вигляді з врахуванням того, що $R_4(x)\equiv 0$:

$$\begin{aligned}
&\left[u_1'(x_1)\right]=iq_{11}R_1^+(x_1)+q_{13}R_3^+(x_1)+iq_{11}R_1^-(x_1)-q_{13}R_3^-(x_1),\\
&\left[u_3'(x_1)\right]=q_{31}R_1^+(x_1)+iq_{33}R_3^+(x_1)-q_{31}R_1^-(x_1)+iq_{33}R_3^-(x_1),\\
&\left[D_3^{(1)}(x_1,0)\right]=q_{41}R_1^+(x_1)+iq_{43}R_3^+(x_1)-q_{41}R_1^-(x_1)+iq_{43}R_3^-(x_1).
\end{aligned}\tag{3.35}$$

Комбінуючи перше та друге рівняння (3.35) маємо:

$$\left[u_3'(x_1)\right]+im_j\left[u_1'(x_1)\right]=\vartheta_j\left[F_j^-(x_1)+\gamma_jF_j^-(x_1)\right],\tag{3.36}$$

де $F_j(z)=R_1(z)+iS_jR_3(z)$, $j=1,2$, (3.37)

$$m_j=\pm\sqrt{-\frac{q_{31}q_{33}}{q_{11}q_{13}}},\ \gamma_j=-\frac{q_{31}+m_jq_{11}}{\vartheta_j},\ S_j=\frac{q_{33}+m_jq_{13}}{q_{31}-m_jq_{11}},\ \left(S_j=-m_j\right),$$

$\vartheta_j = q_{31} - m_j q_{11}$, $j = 1,2$.

Рівняння (3.33) та (3.37) дадуть:

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0) + iS_j\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0) = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1), \tag{3.38}$$

Із співвідношень (3.35) з врахуванням (3.33) витікає наступний вираз для нормальної складової вектора електричної індукції на інтерфейсі:

$$D_3^{(1)}(x_1,0) = \left(q_{34} - \frac{q_{43}q_{31}}{q_{33}}\right)\sigma_{13}(x_1,0) + \frac{q_{43}}{q_{33}}u_3'(x_1,0).$$

Приймаючи до уваги, що функції $\boldsymbol{W}(z)$, $\mathbf{R}(z)$ і $F_j(z)$ побудовані з врахуванням неперервності напружень при переході через інтерфейс та задовольняючи за допомогою співвідношень (3.36), (3.38) умовам (3.29) і (3.30), приходимо до наступної задачі лінійного спряження для функції $F_1(z)$:

$$\begin{aligned} &F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1) = 0,\ x_1 \in (c,a), \\ &F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1) = g(x_1),\ x_1 \notin (c,a), \end{aligned} \tag{3.39}$$

де $g(x_1) = (P_1 - iS_1P_2)\delta(x_1 - d)$.

Слід зауважити, що зі співвідношень (3.36), (3.38) використані тільки рівняння з індексом $j = 1$, яких достатньо для проведення наступного аналізу.

На основі [29] розв'язок задачі (3.39) з врахуванням нульових умов для функції $F_1(z)$ на нескінченності має вид:

$$F_1(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{x\notin(c,a)}\frac{g(t)}{X^+(t)(t-z)}dt,$$

де $X(z)=(z-c)^{-0.5+i\varepsilon}(z-a)^{-0.5-i\varepsilon}$, $\varepsilon=\dfrac{\ln\gamma_1}{2\pi}$.

Обчислення останнього інтегралу приводить до виразу:

$$F_1(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\frac{P_1-iS_1P_2}{X^+(d)(d-z)}, \tag{3.40}$$

Наступне використання формули (3.36) приводить з урахуванням умови $F_1^+(x_1)=F_1^-(x_1)=F_1(x_1)$ для $x_1\notin(c,a)$ до такого виразу для стрибка похідної від переміщень при переході через інтерфейс:

$$[u_3'(x_1)]+im_1[u_1'(x_1)]=\vartheta_1(1+\gamma_1)F_1(x_1)=$$
$$=\vartheta_1(1+\gamma_1)\frac{X(x_1)}{2\pi i}\frac{P_1-iS_1P_2}{X^+(d)(d-x_1)}\qquad \text{для } x_1\notin(c,a). \tag{3.41}$$

Приймаючи також до уваги, що згідно з першим рівнянням (3.39) $F_1^-(x_1)=-\dfrac{1}{\gamma_1}F_1^+(x_1)$, одержуємо:

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)+iS_1\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)=\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1}F_1(x_1)=$$
$$=\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1}\frac{X(x_1)}{2\pi i}\frac{P_1-iS_1P_2}{X^+(d)(d-x_1)}\qquad \text{для } x_1\in[c,a]. \tag{3.42}$$

Аналіз співвідношень (3.41), (3.42) показує, що при $x_1\to a+0$ права частина (3.41) змінює знак нескінченну кількість разів, тобто для такої мо-

делі тріщини має місце добре відома осцилююча особливість [113], що характеризується фізично нереальним взаємопроникненням матеріалів. Розглянемо тому далі контактну модель, яка вільна від вказаного недоліку.

3.2.2. Контактна модель електро-проникної тріщини

Постановка задачі тут подібна попередньому параграфу. Тобто, розглядаються дві різнорідні п'єзоелектричні півплощини $x_3 \geq 0$ і $x_3 \leq 0$ з характеристиками $E_{ijkl}^{(1)}$ і $E_{ijkl}^{(2)}$ відповідно, які жорстко зчеплені по відрізку $L_1 = (c, a)$ лінії поділу матеріалів (інтерфейсу). На частині інтерфейсу, що залишилась, утворились дві зовнішні тріщини $x_1 < c$ та $x_1 > a$ (рис. 3.3).

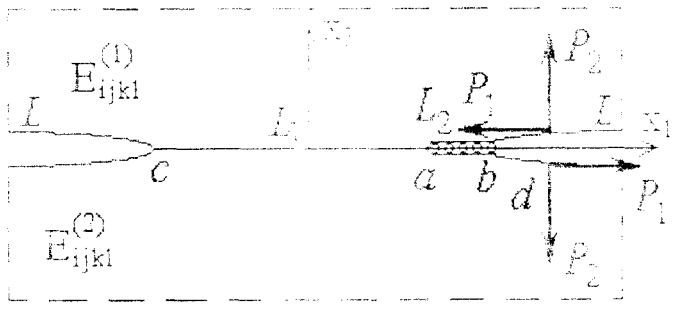

Рис. 3.3

Для усунення осцилюючої особливості розглянемо уточнену модель правої тріщини, яка припускає, що поблизу її вершини $x_1 = a$ має місце область гладкого контакту берегів $L_2 = (a, b)$ із заздалегідь невідомим положенням точки b. Позначаємо, як і раніше, відкриті частини тріщини через $L = (x_1 < c,\ x_1 > b)$.

Слід відзначити, що подібну зону контакту треба було б врахувати і біля вершини лівої тріщини, але взаємний вплив зон контакту є малим аж до знехтування [20], тому з високою ступенею точності можна розглядати кожну зону окремо.

Вважається, що весь інтерфейс електропроникний, тобто $[\varphi] = 0$ для $x_1 \in (-\infty; +\infty)$.

Умови на інтерфейсі у цьому випадку, окрім співвідношень (3.29), включають:

$$\sigma_{13}^{+}=0,\ [u_3]=0,\ [\sigma_{33}]=0,\ x_1\in L_-, \tag{3.43}$$

$$\sigma_{13}^{+}=P_1\delta(x_1-d),\ \sigma_{33}^{+}=-P_2\delta(x_1-d),\ x_1\in L,$$

$$\varphi^{+}=\varphi^{-},\ D_3^{+}=D_3^{-},\ x_1\in(-\infty,+\infty). \tag{3.44}$$

Задовольняючи за допомогою співвідношень (3.25), (3.38) всім необхідним граничним умовам з (3.29), (3.43), (3.44) одержуємо:

$$F_1^{+}(x_1)+\gamma F_1^{-}(x_1)=0,\ x_1\in L_-, \tag{3.45}$$

$$Re\,F_1^{+}(x_1)=0,\ x_1\in L_+, \tag{3.46}$$

$$F_1^{+}(x_1)-F_1^{-}(x_1)=g(x_1),\ x_1\in L, \tag{3.47}$$

де $g(x_1)=(P_1-iS_1P_2)\delta(x_1-d)$.

Отримана задача лінійного спряження являє собою комбіновану крайову задачу Діріхле – Рімана. Вона формально співпадає з (1.60) – (1.62), тому не зупиняючись на деталях, приведемо її розв'язок у вигляді:

$$F_1(z)=\frac{X_0(z)}{2\pi i(d-z)}G(z), \tag{3.48}$$

де $G(z)=Re\left[\dfrac{P_1-iS_1P_2}{X_0^{+}(d)}\right]\dfrac{Y(z)}{Y(d)}+i\,Im\left[\dfrac{P_1-iS_1P_2}{X_0^{+}(d)}\right]$, $X_0(z)=\dfrac{ie^{i\psi(z)}}{\sqrt{(z-c)(z-a)}}$,

$$\psi(z)=2\varepsilon ln\frac{\sqrt{(b-a)(z-c)}}{\sqrt{(b-c)(z-a)}+\sqrt{(a-c)(z-b)}},\ \varepsilon=\frac{1}{2\pi}\ln\gamma,\ Y(z)=\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}.$$

З врахуванням того, що для $x_1 \notin (c,b)$ $F_1^+(x_1) = F_1^-(x_1) = F_1(x_1)$, одержуємо на основі формули (3.36):

$$\left[u_1'(x_1)\right] + im_1\left[u_1'(x_1)\right] = \vartheta_1(1+\gamma_1)\frac{X_0(x_1)}{2\pi i(d-x_1)}G(x_1). \tag{3.49}$$

Проаналізуємо формули (3.48), (3.49), якщо $b \to a$. Після нескладних аналітичних розрахунків бачимо, що вони зводяться до формул (3.40), (3.41) відповідно, що підтверджує правомірність одержаних розв`язків для контактної моделі.

Для будь-якого положення точки b розв`язок (3.48) математично вірний. Цей розв`язок буде й фізично коректний, якщо будуть виконані наступні додаткові умови:

$$\sigma_y^1(x_1,0) \le 0 \text{ для } x_1 \in L_2,$$

$$\left[u_1(x_1)\right] \ge 0 \text{ для } x \ge b,$$

які мають той же сенс, що і (1.69). Подальший аналіз тут аналогічний відповідному аналізу п. 1.4, але тут його приводимо для зручності читання. З аналізу отриманого розв`язку витікає, що останні умови будуть виконані, якщо тріщина в точці b закривається плавно, тобто $\sqrt{x_1-b}\left[u_1'(x_1)\right]\Big|_{x_1\to b+0} \to 0$. Приймаючи до уваги, що $\psi(b)=0$, та використовуючи формулу (3.49), приходимо до такого рівняння:

$$\mathrm{Re}\left[\frac{P_1 - iS_1P_2}{X_0^+(d)}\right] = 0.$$

Підставляючи в останнє рівняння вираз для $X_0^*(d)$ й відокремлюючи дійсну частину, отримаємо:

$$tg\{\psi(d)\} = -S_1 \frac{P_2}{P_1}, \tag{3.50}$$

де $\psi(d)$ може бути подано у вигляді:

$$\psi(d) = 2\varepsilon ln \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{(1+\lambda)}\sqrt{1-\chi} + \sqrt{1-(1-\lambda)\chi}}. \tag{3.51}$$

причому $\chi = \dfrac{a-c}{d-c}$, $\lambda = \dfrac{b-a}{a-c}$.

Рівняння (3.50) є трансцендентним рівнянням для визначення відносної довжини області контакту λ. У випадку малих λ, вважаючи $1+\lambda \approx 1$, одержуємо $\psi(d) \approx \varepsilon ln \dfrac{\lambda}{4(1-\chi)}$ і рівняння (3.50) допускає наступний наближений розв`язок:

$$\lambda_0 \approx \tilde{\lambda}_0 = 4(1-\chi)\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left[arctg\left(-S_1 \frac{P_2}{P_1}\right) + \pi n\right]\right\}, \tag{3.52}$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, причому його потрібно вибирати так, щоб $\tilde{\lambda}_0$ являло собою найбільший корінь рівняння (3.50) із проміжку $\left(0, \lambda^*\right)$, де $\lambda^* = \dfrac{d-a}{a-c}$.

Знайдемо тепер коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН), які визначають можливість розвитку тріщини. У випадку контактної моделі таким КІН є коефіцієнт інтенсивності зсувного напруження:

$$k_2 = \lim_{x_1 \to a} \sqrt{2\pi(a - x_1)}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0). \tag{3.53}$$

Враховуючи, що для $x_1 \in L$ $F_1^-(x_1) = -\gamma_1^{-1}F_1^+(x_1)$, з формули (3.38) отримаємо:

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} Re\left\{F_1^-(x_1)\right\} \text{ для } x_1 \in L.$$

Використовуючи формулу (3.48), а також враховуючи, що $e^{\omega(x_1)} = \sqrt{\gamma_1}e^{\psi^-(x_1)}$, для $x_1 \in L$, приходимо до виразу:

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} Re\left\{\frac{e^{\psi^-(x_1)}}{2\pi i(d - x_1)\sqrt{(x_1 - c)(a - x_1)}} G^-(x_1)\right\} \text{ для } x_1 \in L,$$

де $\psi^-(x_1) = 2\varepsilon ln \dfrac{\sqrt{(b-a)(x_1 - c)}}{\sqrt{(b-c)(a - x_1)} + \sqrt{(a-c)(b - x_1)}}$.

Підставляючи останню формулу в (3.53) і враховуючи, що $\psi^-(a) = 0$, маємо:

$$k_2 = \frac{1 + \gamma_1}{\sqrt{2\pi\gamma_1(a - c)(d - a)}} Im\left[\frac{P_1 - iS_1P_2}{X_0^-(d)}\right]. \tag{3.54}$$

Шляхом нескладних перетворень, остання формула з врахуванням рівняння (3.50), дає наступний вираз:

$$k_2 = -\frac{1+\gamma_1}{\sqrt{2\pi\gamma_1}}\sqrt{\frac{d-c}{(a-c)(d-a)}}\sqrt{P_1^2 + S_1^2 P_2^2}\,.$$

З метою порівняння результатів, отриманих за допомогою двох моделей міжфазної тріщини, на рис. 3.4 наведені графіки $[u_3^1(x_1)]$, отримані для осциляційної моделі на підставі формули (3.41) (пунктирна лінія) і для контактної моделі при $\lambda = \lambda_0 = 0.029$ на підставі формули (3.49) (суцільна лінія).

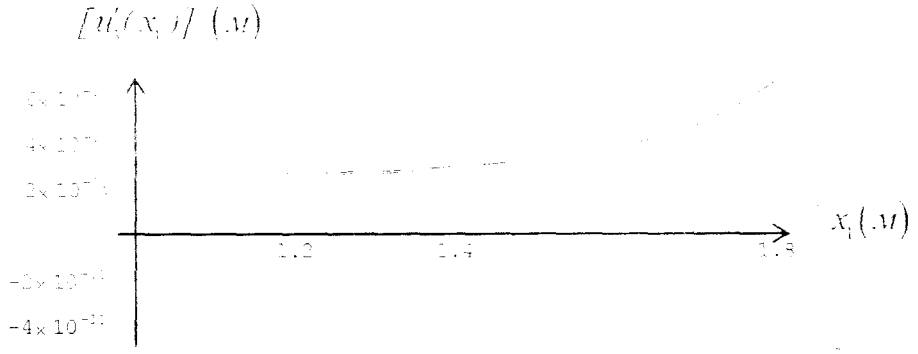

Рис. 3.4

Вважалось, що верхній матеріал PZT 4, а нижній – PZT 5 (характеристики матеріалів наведені у табл. 3.1), $c = -1м$, $a = 1м$, $d = 2м$, $P_1 = 50\frac{Н}{м}$, $P_2 = 1\frac{Н}{м}$.

Слід відзначити, що для біматеріалу PZT 4/PZT 5 матриці **G** і **Q**, які фігурують в співвідношеннях (3.27) і (3.34), мають вигляд:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 4.7\cdot10^{10}i & -5.8\cdot10^{9} & -11.6 \\ 5.8\cdot10^{9} & 4.4\cdot10^{10}i & 12.4i \\ 11.6 & 12.4i & -5.8\cdot10^{-9}i \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} -1.8\cdot10^{-11}i & -7.6\cdot10^{-12} & 0.019 \\ 7.6\cdot10^{-12} & -1.7\cdot10^{-11}i & -0.02i \\ -0.019 & -0.022i & 8.7\cdot10^{-7}i \end{pmatrix}.$$

Таблиця 3.1

Характеристики матеріалів

	PZT 4	PZT 5	Скло
C_{11}, Н/м^2	$13.9\cdot10^{10}$	$12.1\cdot10^{10}$	$5.88\cdot10^{10}$
C_{13}, Н/м^2	$7.43\cdot10^{10}$	$7.52\cdot10^{10}$	$1.47\cdot10^{10}$
C_{33}, Н/м^2	$11.3\cdot10^{10}$	$11.1\cdot10^{10}$	$5.88\cdot10^{10}$
C_{44}, Н/м^2	$2.56\cdot10^{10}$	$2.11\cdot10^{10}$	$2.21\cdot10^{10}$
e_{31}, Кл/м^2	-6.98	-5.4	0
e_{33}, Кл/м^2	13.84	15.8	0
e_{15}, Кл/м^2	13.44	12.3	0
ε_{11}, Ф/м	$60\cdot10^{-10}$	$81.07\cdot10^{-10}$	$0.885\cdot10^{-10}$
ε_{33}, Ф/м	$54.7\cdot10^{-10}$	$73.46\cdot10^{-10}$	$0.8856\cdot10^{-10}$

Далі основна увага приділялася контактній моделі міжфазної тріщини. Зокрема, у табл. 3.2 – 3.5 для $c=-1м$, $a=1м$, $P_2=1\dfrac{H}{м}$ і різних d, наведені значення відносних довжин області контакту λ_0, залежно від величини P_1.

Вибиралися біматеріали, складені з компонент, характеристики яких наведені в табл. 3.1.

У табл. 3.2 – 3.3 наведені результати для біматеріалу PZT 4/PZT 5, для якого $\gamma=1.0328$, $\varepsilon=0.0051$.

У табл. 3.4 – 3.5 наведені результати для PZT 4/скло (табл. 3.1), для якого $\gamma=0.7986$, $\varepsilon=-0.0358$.

На рис. 3.5 і 3.6 наведені значення КІН k_2 для біматеріалів PZT 4/PZT 5 і PZT 4/скло, відповідно.

З отриманих результатів випливає, що для п'єзоелектричних матеріалів зони контакту є, як правило, ще меншими, ніж для ізотропних чи анізотропних біматеріалів. Це пояснюється, в першу чергу, малістю біматеріальної константи ε, що має місце у цьому випадку. В той же час видно, що для деяких значень P_1/P_2 довжини зон контакту стають порівнянними з довжиною ділянки зчеплення $[c,a]$. Цікаво, що виникнення такої ситуації визначається знаком ε і якщо для $\varepsilon > 0$ (табл. 3.2, 3.3) велика зона контакту виникає при $P_1/P_2 > 0$, то для $\varepsilon < 0$ навпаки при $P_1/P_2 < 0$. Слід також відзначити, що довжина зони контакту та величина k_2 залежать також від точки прикладання зосереджених сил, причому приближення цієї точки до вершини тріщини веде до зменшення λ_0 і збільшення КІН k_2.

Таблиця 3.2

Залежності λ_0 від співвідношення величин зосереджених сил та точки їх прикладання для $P_1/P_2 \le 0$ для біматеріалу PZT 4/PZT 5

$\frac{d-a}{a-c}$ \ P_1/P_2	-100	-10	-5	-2	-1	0
0.25	$8.51\cdot10^{-266}$	$2.23\cdot10^{-258}$	$2.76\cdot10^{-250}$	$3.73\cdot10^{-238}$	$3.96\cdot10^{-201}$	$1.01\cdot10^{-133}$
0.5	$1.42\cdot10^{-265}$	$3.72\cdot10^{-258}$	$4.59\cdot10^{-250}$	$6.22\cdot10^{-238}$	$6.61\cdot10^{-201}$	$1.67\cdot10^{-133}$
1	$2.13\cdot10^{-265}$	$5.57\cdot10^{-258}$	$6.89\cdot10^{-250}$	$9.33\cdot10^{-238}$	$9.91\cdot10^{-201}$	$2.52\cdot10^{-133}$
2	$2.84\cdot10^{-265}$	$7.43\cdot10^{-258}$	$9.19\cdot10^{-250}$	$1.24\cdot10^{-237}$	$1.32\cdot10^{-200}$	$3.36\cdot10^{-133}$

Таблиця 3.3

Залежності λ_0 від співвідношення величин зосереджених сил та точки їх прикладання для $P_1/P_2 > 0$ для біматеріалу PZT 4/PZT 5

$\frac{d-a}{a-c}$ \ P_1/P_2	1	2	5	10	100
0.25	$2.56\cdot10^{-66}$	$2.72\cdot10^{-39}$	$3.68\cdot10^{-17}$	$4.54\cdot10^{-9}$	$9.9\cdot10^{-2}$
0.5	$4.26\cdot10^{-66}$	$4.53\cdot10^{-39}$	$6.13\cdot10^{-17}$	$7.57\cdot10^{-9}$	$1.77\cdot10^{-1}$
1	$6.39\cdot10^{-66}$	$6.79\cdot10^{-39}$	$9.19\cdot10^{-17}$	$1.14\cdot10^{-8}$	$2.91\cdot10^{-1}$
2	$8.52\cdot10^{-66}$	$9.05\cdot10^{-39}$	$1.23\cdot10^{-16}$	$1.51\cdot10^{-8}$	$4.3\cdot10^{-1}$

Таблиця 3.4

Залежності λ_0 від співвідношення величин зосереджених сил та точки їх прикладання для $P_1/P_2 \le 0$ для PZT 4/скло

$\frac{d-a}{a-c}$ \ P_1/P_2	-100	-10	-5	-2	-1	0
0.25	$1.55\cdot10^{-1}$	$4.62\cdot10^{-2}$	$3.25\cdot10^{-3}$	$1.95\cdot10^{-6}$	$2.49\cdot10^{-10}$	$6.91\cdot10^{-20}$
0.5	$4.81\cdot10^{-1}$	$7.94\cdot10^{-2}$	$5.43\cdot10^{-3}$	$3.25\cdot10^{-6}$	$4.08\cdot10^{-10}$	$1.15\cdot10^{-19}$
1	$9.62\cdot10^{-1}$	$1.24\cdot10^{-1}$	$8.17\cdot10^{-3}$	$4.88\cdot10^{-6}$	$6.12\cdot10^{-10}$	$1.73\cdot10^{-19}$
2	$1.89\cdot10^{-1}$	$1.73\cdot10^{-1}$	$1.09\cdot10^{-2}$	$6.51\cdot10^{-6}$	$8.16\cdot10^{-10}$	$2.31\cdot10^{-19}$

Таблиця 3.5

Залежності λ_0 від співвідношення величин зосереджених сил та точки їх прикладання для $P_1/P_2 > 0$ для Р/Т 4/скло

$\frac{d-a}{a-c}$ \ P_1/P_2	1	2	5	10	100
0.25	$1.94\cdot10^{-27}$	$2.44\cdot10^{-33}$	$1.46\cdot10^{-36}$	$9.59\cdot10^{-38}$	$7.88\cdot10^{-39}$
0.5	$3.23\cdot10^{-29}$	$4.06\cdot10^{-33}$	$2.43\cdot10^{-36}$	$1.6\cdot10^{-37}$	$1.31\cdot10^{-38}$
1	$4.85\cdot10^{-29}$	$6.09\cdot10^{-33}$	$3.65\cdot10^{-36}$	$2.4\cdot10^{-37}$	$1.97\cdot10^{-38}$
2	$6.46\cdot10^{-29}$	$8.12\cdot10^{-33}$	$4.86\cdot10^{-36}$	$3.2\cdot10^{-37}$	$2.63\cdot10^{-38}$

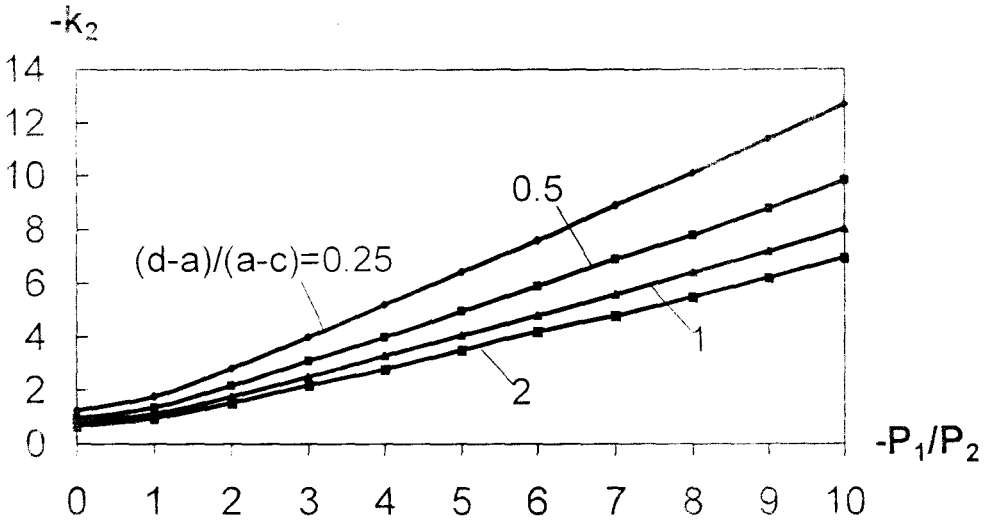

Рис. 3.5

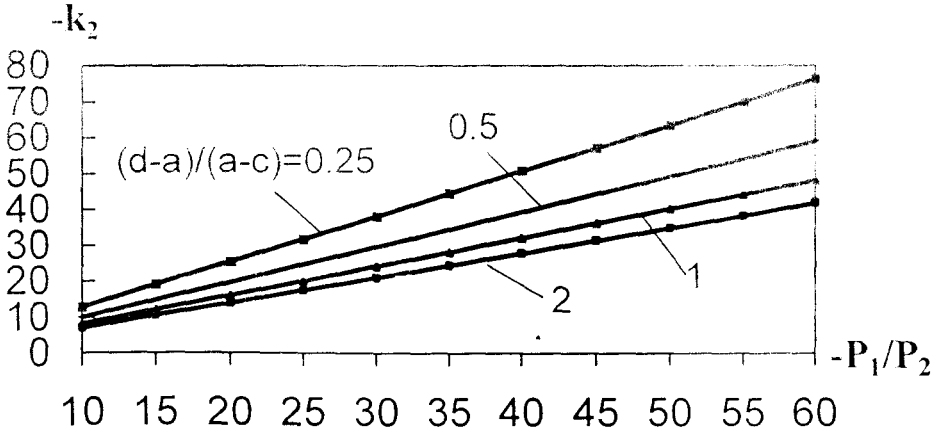

Рис. 3.6

3.3. Зовнішня електроізольована тріщина

3.3.1. Постановка задачі та побудова основних співвідношень

Розглянемо тепер задачу, аналогічну попередньому розділу, але в припущенні, що тріщина електроізольована, тобто силові лінії електричного поля гальмуються заповнювачем тріщини. Тобто вважаємо, що дві різнорідні п'єзоелектричні півплощини $x_3 \geq 0$ і $x_3 \leq 0$ з характеристиками $E_{ijkl}^{(1)}$ і $E_{ijkl}^{(2)}$, відповідно, жорстко зчеплені по відрізку $L_1 = (c, a)$ лінії поділу матеріалів (інтерфейсу), а на частині інтерфейсу, що залишилась, утворились дві зовнішні тріщини $x_1 < c$ та $x_1 > a$ (рис. 3.7), які вважаємо електроізольованими.

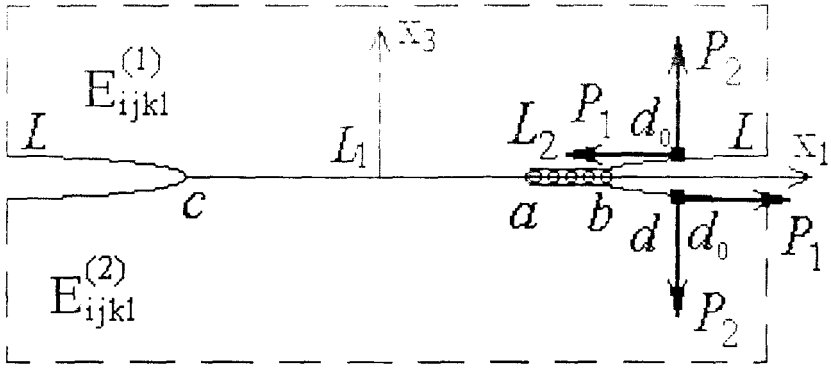

Рис. 3.7

Аналогічно попередньому розділу вважаємо, що біля правої вершини тріщини $x_1 = a$ має місце зона гладкого безфрикційного контакту $L_2 = [a, b]$, а відкриті частини тріщини, як і раніше, позначаємо через $L = (x_1 < c,\ x_1 > b)$.

Базуємося на наступних представленнях похідної від стрибка переміщень $[\mathbf{v}'(x_1)]$ та вектора напружень $\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0)$, отриманих у розділі 3, п. 3.1:

$$[\mathbf{v}'(x_1)] = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \tag{3.55}$$

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1,0)=\mathbf{G}\mathbf{W}^{+}(x_1)-\overline{\mathbf{G}}\mathbf{W}^{-}(x_1), \tag{3.56}$$

де

$$\left[\mathbf{v}'(x_1)\right]=\left\{\left[u_1'(x_1)\right],\left[u_3'(x_1)\right],\left[\varphi'(x_1)\right]\right\}^{T},$$

$$\mathbf{t}^{(1)}=\left\{\sigma_{12}^{(1)}(x_1,0),\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0),D_2^{(1)}(x_1,0)\right\}^{T},$$

$$\mathbf{W}(z)=\begin{Bmatrix}W_1(z)\\W_3(z)\\W_4(z)\end{Bmatrix}$$ – вектор-функція комплексної змінної.

Введемо нову вектор-функцію:

$$\mathbf{O}(z)=\begin{cases}\mathbf{G}\mathbf{W}(z), & z>0\\ \overline{\mathbf{G}}\mathbf{W}(z), & z<0.\end{cases} \tag{3.57}$$

Тоді

$$\begin{aligned}\mathbf{W}^{+}(x_1)&=\mathbf{G}^{-1}\mathbf{O}^{+}(x_1),\\ \mathbf{W}^{-}(x_1)&=\overline{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{O}^{-}(x_1),\end{aligned} \tag{3.58}$$

і з (3.55) та (3.56) отримаємо співвідношення:

$$\left[\mathbf{V}'(x_1)\right]=\mathbf{Q}\mathbf{O}^{+}(x_1)-\overline{\mathbf{Q}}\mathbf{O}^{-}(x_1), \tag{3.59}$$

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1,0)=\mathbf{O}^{+}(x_1)-\mathbf{O}^{-}(x_1), \tag{3.60}$$

де $\mathbf{Q}=\mathbf{G}^{-1}$, $\mathbf{G}=\begin{bmatrix} G_{11} & G_{13} & G_{14} \\ G_{31} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ig_{11} & g_{13} & g_{14} \\ g_{31} & ig_{33} & ig_{34} \\ g_{41} & ig_{43} & ig_{44} \end{bmatrix}$, $\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} iq_{11} & q_{13} & q_{14} \\ q_{31} & iq_{33} & q_{34} \\ q_{41} & iq_{43} & iq_{44} \end{bmatrix}$,

причому всі q_{ij}, як і раніше, – дійсні для п'єзоелектриків класу $6mm$.

Проведемо далі перетворення рівнянь (3.59), (3.60) аналогічно роботі [88].

Розглянемо довільну матрицю-стрічку $S=[S_1,S_3,S_4]$ та добуток $S[\mathbf{V}'(x_1)]$, який, використовуючи (3.60) та вираз для $\mathbf{Q}$, може бути записаний у вигляді:

$$\mathbf{S}[\mathbf{V}'(x_1)]=\mathbf{SQO}^{+}(x_1)-\mathbf{S}\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{O}^{-}(x_1).$$

Вводячи нову функцію $F(z)=\mathbf{YO}(z)$, де $\mathbf{Y}=[Y_1,Y_3,Y_4]=\mathbf{SQ}$ та вимагаючи, щоб $\mathbf{S}\bar{\mathbf{Q}}=-\gamma\mathbf{SQ}$, отримаємо:

$$\mathbf{S}[\mathbf{V}'(x_1)]=F^{+}(x_1)+\gamma F^{-}(x_1),$$

де γ та S^T – власне значення та власний вектор системи:

$$\left(\gamma\mathbf{Q}^T+\bar{\mathbf{Q}}^T\right)\mathbf{S}^T=0. \tag{3.61}$$

Корені рівняння $det\left(\gamma\mathbf{Q}^T+\bar{\mathbf{Q}}^T\right)=0$ мають вид:

$$\gamma_1=\frac{1+\delta}{1-\delta},\ \gamma_3=\gamma_1^{-1},\ \gamma_4=1,$$

де $\delta^2 = \dfrac{q_{14}^2 q_{33} + q_{13}^2 q_{44} - 2q_{14}q_{13}q_{34}}{q_{11}\left(q_{33}q_{44} - q_{34}^2\right)}$.

Притримуючись далі методики [88], отримаємо, що при $\delta^2 > 0$ вірні наступні представлення:

$$\left[u_3'(x_1)\right] + m_{j4}\left[\varphi'(x_1)\right] + im_{j1}\left[u_1'(x_1)\right] = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \tag{3.62}$$

$$n_{j1}\sigma_{13}^{\pm}(x_1,0) + i\left\{n_{j3}\sigma_{33}^{\pm}(x_1,0) + n_{j4}D_3^{\pm}(x_1,0)\right\} = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1), \tag{3.63}$$

де $F_j(z) = n_{j1}O_1(z) + i\left[n_{j3}O_3(z) + n_{j4}O_4(z)\right]$, $j = 1,3,4$,

$m_{j4} = S_{j4}$, $m_{j1} = -iS_{j1}$, $n_{j1} = \mathbf{У}_{j1}$, $n_{j3} = -i\mathbf{У}_{j3}$, $n_{j4} = -i\mathbf{У}_{j4}$,

причому m_{jl}, n_{jl} $(j,l = 1,3,4)$ – дійсні величини; S_j та γ_j є власні вектори та власні значення, котрі знаходимо з системи (3.61).

Припустимо тепер, що на берегах тріщини крім зосереджених сил (P_1, P_2) задана також зосереджена електрична індукція інтенсивності d_0 (рис. 3.7). Тоді умови на інтерфейсі мають вигляд:

$$u_1^+ = u_1^-,\ u_3^+ = u_3^-,\ \sigma_{13}^+ = \sigma_{13}^-,\ \sigma_{33}^+ = \sigma_{33}^-,\ \varphi^+ = \varphi^-,\ D_3^+ = D_3^-,\ x_1 \in L_1, \tag{3.64}$$

$$\sigma_{13}^{\pm} = P_1\delta(x_1 - d),\ \sigma_{33}^{\pm} = -P_2\delta(x_1 - d),\ D_3^{\pm} = d_0\delta(x_1 - d),\ x_1 \in L, \tag{3.65}$$

$$\left[u_3\right] = 0,\ \left[\varphi\right] = 0,\ \sigma_{13}^{\pm} = 0,\ \left[\sigma_{33}\right] = 0,\ \left[D_3\right] = 0,\ x_1 \in L_2. \tag{3.66}$$

Приймаючи до уваги відсутність будь-яких збурень при $z \to \infty$, умова на нескінченності має вигляд:

$$F_j(z)\Big|_{z\to\infty} = 0. \tag{3.67}$$

Задовольняючи за допомогою співвідношень (3.62), (3.63) умовам на інтерфейсі, приходимо до наступних рівнянь:

$$\begin{cases} F_j^+(x_1) + i F_j^-(x_1) = 0 \quad \text{на } L_1, & (3.68) \\ \operatorname{Re} F_j^+(x_1) = 0 \quad \text{на } L_2, & (3.69) \\ F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1) = g_j(x_1) \quad \text{на } L, & (3.70) \end{cases}$$

де $g_j(x_1) = \left\{ n_{j1}P_1 + i\left(-n_{j3}P_2 + n_{j4}d_0\right)\right\}$, $j = 1,\ 3,\ 4$.

Отримана задача лінійного спряження являє собою комбіновану крайову задачу Діріхле – Рімана, яка вже розглядалась в п. 3.2.2. Її розв`язок для $j = 1$ має вигляд:

$$F_1(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i(d-z)} G(z), \tag{3.71}$$

де $G(z) = \operatorname{Re}\left[\dfrac{n_{11}P_1 + iN_1}{X_0^+(d)}\right]\dfrac{Y(z)}{Y(d)} + i\operatorname{Im}\left[\dfrac{n_{11}P_1 + iN_1}{X_0^+(d)}\right]$, $Y(z) = \sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$,

$$X_0(z) = \frac{ie^{i\varphi(z)}}{\sqrt{(z-c)(z-a)}}, \tag{3.72}$$

$$\varphi(z)=2\varepsilon\ln\frac{\sqrt{(b-a)(z-c)}}{\sqrt{(a-c)(z-a)}+\sqrt{(a-c)(z-b)}},\ \varepsilon=\frac{1}{2\pi}\ln\gamma_1,\ N_1=-n_{13}P_2+n_{14}d_0.$$

Так як при $j=4$ справедливо: $\gamma_1=1$, $\varepsilon=0$, $m_{41}=0$, то вираз для функції $F_1(z)$ запишеться у вигляді:

$$F_1(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\frac{n_{41}P_1+iN_2}{X(d)(d-z)},$$

де $X(z)=\dfrac{1}{\sqrt{(z-c)(z-a)}}$, $N_2=-n_{13}P_2+n_{14}d_0$.

На завершенні цього параграфу відзначимо, що на відміну від електропроникної тріщини, розв'язки комбінованої крайової задачі Діріхле – Рімана слід розшукувати як при $j=1$, так і при $j=4$. Тобто, повний розв'язок може бути побудований шляхом спільного використання функцій $F_1(z)$ і $F_4(z)$.

3.3.2. Знаходження стрибків від переміщень, напружень, електричної індукції

Знайдемо тепер всі необхідні електромеханічні фактори на основі розвязку попереднього пункту.

Спочатку знайдемо переміщення на ділянці $x_1 > b$.

З врахуванням того, що для $x_1 > b$ $F_1^+(x_1) = F_1^-(x_1) = F_1(x_1)$, на основі формули (3.62) отримаємо:

$$\left[u_3'(x_1)\right] + m_{14}\left[\varphi'(x_1)\right] + im_{11}\left[u_1'(x_1)\right] = (1+\gamma_1)\frac{X_0(x_1)}{2\pi i(d-x_1)}G(x_1). \quad (3.73)$$

В результаті перетворень та відділення дійсної та уявної частини, приходимо до співвідношень:

$$m_{11}\left[u_1'(x_1)\right] = \frac{1+\gamma_1}{x_1-d}\sqrt{\frac{d-c}{x_1-c}}S_1(x_1), \quad (3.74)$$

$$\left[u_3'(x_1)\right] + m_{14}\left[\varphi'(x_1)\right] = \frac{1+\gamma_1}{d-x_1}\sqrt{\frac{d-c}{x_1-c}}S_2(x_1), \quad (3.75)$$

де $S_1(x_1) = \sin\varphi(x_1)\sqrt{\frac{d-b}{x_1-b}}r_1(d) + \cos\varphi(x_1)\sqrt{\frac{d-a}{x_1-a}}r_2(d)$,

$$S_2(x_1) = \sin\varphi(x_1)\sqrt{\frac{d-a}{x_1-a}}r_2(d) - \cos\varphi(x_1)\sqrt{\frac{d-b}{x_1-b}}r_1(d),$$

$$r_1(d) = n_{11}P_1\sin\varphi(d) - (-n_{13}P_2 + n_{14}d_{15})\cos\varphi(d),$$

$$r_2(d) = n_{11}P_1\cos\varphi(d) + (-n_{13}P_2 + n_{14}d_0)\sin\varphi(d).$$

Враховуючи, що при j=4

$$\left[u_3'(x_1)\right] + m_{44}\left[\varphi'(x_1)\right] = \mathrm{Re}\left[(1+\gamma_1)F_1(x_1)\right], \tag{3.76}$$

маємо:

$$\left[u_3'(x_1)\right] - m_{14}\left[\varphi'(x_1)\right] = \frac{1}{\pi(d-x_1)}\sqrt{\frac{(d-c)(d-a)}{(x_1-c)(x_1-a)}}N_2. \tag{3.77}$$

Розглядаючи співвідношення (3.75) та (3.77) як систему, можемо знайти окремо значення для $\left[u_3'(x_1)\right]$ та $\left[\varphi'(x_1)\right]$ у вигляді:

$$\left[u_3'(x_1)\right] = \frac{1}{d-x_1}\sqrt{\frac{d-c}{x_1-c}}\left\{\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{d-a}{x_1-a}}N_2 - \frac{m_{44}}{m_{14}-m_{44}}\left\{(1+\gamma_1)S_2(x_1) - \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{d-a}{x_1-a}}N_2\right\}\right\}, \tag{3.78}$$

$$\left[\varphi'(x_1)\right] = \frac{1}{d-x_1}\sqrt{\frac{d-c}{x_1-c}}\left\{\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{d-a}{x_1-a}}\left(\frac{1-N_2}{m_{44}} - \frac{N_2}{m_{14}-m_{44}}\right) + \frac{(1+\gamma_1)S_2(x_1)}{m_{14}-m_{44}}\right\}.$$

Інтегрування співвідношень (3.74) та (3.78) дає вирази для стрибків переміщень та електричного потенціалу.

Тепер будемо розглядати ділянку зчеплення $x_1 \in L_1$ та шукати на ній напруження й електричну індукцію.

На основі формули (3.63) для $j=1$ та $j=4$ одержуємо наступні співвідношення:

$$n_{11}\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0) + i\left\{n_{13}\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0) + n_{14}D_3^{(1)}(x_1,0)\right\} = F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1), \tag{3.79}$$

$$n_{41}\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)+i\left\{n_{43}\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)+n_{44}D_3^{(1)}(x_1,0)\right\}=F_4^+(x_1)-F_4^-(x_1). \quad (3.80)$$

Приймаючи до уваги, що на основі (3.68) $F_1^+(x_1)-F_1^-(x_1)=\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1}F_1(x_1)$ на L_1 та виходячи з формул (3.71) і (3.79), маємо на цьому проміжку:

$$n_{11}\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)+i\left\{n_{13}\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)+n_{14}D_3^{(1)}(x_1,0)\right\}=\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1}\frac{V_0(x_1)}{2\pi i(d-x_1)}G(x_1). \quad (3.81)$$

Далі, відокремлюючи дійсну та уявну частини, маємо:

$$n_{11}\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)=-\frac{1+\gamma_1}{2\sqrt{\gamma_1}}Z(x_1)\left\{\sin\varphi^*(x_1)\sqrt{\frac{(a-x_1)(d-b)}{(b-x_1)(d-a)}}r_1(d)+\right.$$

$$\left.+\cos\varphi^*(x_1)r_2(d)\right\}, \quad (3.82)$$

$$n_{13}\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)+n_{14}D_3^{(1)}(x_1,0)=\frac{1+\gamma_1}{2\sqrt{\gamma_1}}Z(x_1)\left\{\cos\varphi^*(x_1)\sqrt{\frac{(a-x_1)(d-b)}{(b-x_1)(d-a)}}r_1(d)-\right.$$

$$\left.-\sin\varphi^*(x_1)r_2(d)\right\}, \quad (3.83)$$

де $Z(x_1)=\frac{1}{\pi(d-x_1)}\sqrt{\frac{(d-c)(d-a)}{(x_1-c)(a-x_1)}}$,

$$\varphi^*(x_1)=2\varepsilon ln\frac{\sqrt{(b-a)(x_1-c)}}{\sqrt{(a-c)(a-x_1)}+\sqrt{(a-c)(b-x_1)}}.$$

Виходячи з формули (3.80) та маючи на увазі, що $\gamma_4=1$, $\varepsilon=0$, $F_4^+(x_1)-F_4^-(x_1)=2F_4(x_1)$ на L_1, отримаємо:

$$n_{43}\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)+n_{14}D_3^{(1)}(x_1,0)=-Z(x_1)N_2 \text{ на } L_1. \tag{3.84}$$

Далі формули (3.83) та (3.84) розглядаються як система, з якої знаходимо:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)=-\frac{n_{43}}{n_{14}n_{43}-n_{13}n_{44}}Z(x_1)\left\{-P_2+\frac{n_{44}}{n_{43}}d_0+\frac{\gamma_1+1}{2\sqrt{\gamma_1}}\left\{\sqrt{\frac{(a-x_1)(d-b)}{(b-x_1)(d-a)}}\cdot\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot r_1(d)\cos\varphi^*(x_1)-\sin\varphi^*(x_1)r_2(d)\right\}\right\}-\frac{1}{n_{43}}Z(x_1)N_2,$$

$$D_3^{(1)}(x_1,0)=\frac{1}{n_{14}-\frac{n_{13}}{n_{43}}n_{44}}Z(x_1)\left\{-P_2+\frac{n_{44}}{n_{43}}d_0+\frac{\gamma_1+1}{2\sqrt{\gamma_1}}\left\{\sqrt{\frac{(a-x_1)(d-b)}{(b-x_1)(d-a)}}\cdot\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot r_1(d)\cos\varphi^*(x_1)-\sin\varphi^*(x_1)r_2(d)\right\}\right\}. \tag{3.85}$$

Тепер розглянемо ділянку проковзування $x_1\in L_2$. На ній будемо знаходити напруження та електричну індукцію.

Виходимо з формул (3.79), (3.80), в яких $F_1(x_1)$ знаходиться за формулою (3.71). Для ділянки $x_1\in L_2$ мають місце слідуючи властивості функції $X_0(x_1)$:

$$X_0^{\pm}(x_1)=\frac{ie^{-\varphi_0(x_1)}}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}},\ \varphi_0(x_1)=i\varphi(x_1).$$

В результаті перетворень та відокремлення дійсної та уявної частини на основі (3.79) отримаємо:

$$n_{13}\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)+n_{14}D_3^{(1)}(x_1,0)=\frac{1}{\pi(d-x_1)\sqrt{x_1-c}}\left[-\frac{A_1ch\varphi_0(x_1)}{Y(d)\sqrt{b-x_1}}+\frac{A_2sh\varphi_0(x_1)}{\sqrt{x_1-a}}\right], \quad (3.86)$$

де $A_1=-\sqrt{(d-c)(d-a)}r_1(d)$, $A_2=-\sqrt{(d-c)(d-a)}r_2(d)$.

Аналогічно із формули (3.80) маємо:

$$n_{13}\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)+n_{14}D_3^{(1)}(x_1,0)=-Z_1(x_1)N_2, \quad (3.87)$$

де $Z_1(x_1)=\dfrac{1}{\pi(d-x_1)}\sqrt{\dfrac{(d-c)(d-b)}{(x_1-c)(b-x_1)}}$.

Розглядаючи (3.86), (3.87) як систему рівнянь, маємо:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)=\frac{n_{44}}{n_{13}n_{44}-n_{14}n_{43}}\left(\frac{1}{\pi(d-x_1)\sqrt{x_1-c}}\left\{\frac{A_2sh\varphi_0(x_1)}{\sqrt{x_1-a}}-\frac{A_1ch\varphi_0(x_1)}{Y(d)\sqrt{b-x_1}}\right\}+\right.$$
$$\left.+\frac{n_{14}}{n_{44}}Z_1(x_1)N_2\right), \quad (3.88)$$

$$D_3^{(1)}(x_1,0)=-\frac{n_{43}}{n_{13}n_{44}-n_{14}n_{43}}\left(\frac{1}{\pi(d-x_1)\sqrt{x_1-c}}\left\{\frac{A_2sh\varphi_0(x_1)}{\sqrt{x_1-a}}-\frac{A_1ch\varphi_0(x_1)}{Y(d)\sqrt{b-x_1}}\right\}+\right.$$
$$\left.+\frac{n_{14}}{n_{44}}Z_1(x_1)N_2\right)-\frac{1}{n_{44}}Z_1(x_1)N_2. \quad (3.89)$$

Таким чином, були знайдені переміщення, напруження та електрична індукція на відповідних проміжках лінії поділу матеріалів.

3.3. Аналіз коефіцієнтів інтенсивності напружень, електричної індукції та реальної довжини зони контакту

Розглянемо спочатку знаходження коефіцієнтів інтенсивності (КІ) напружень та електричної індукції. Введемо наступні КІ:

$$k_1 = \lim_{x_1 \to b-0} \sqrt{2\pi(b - x_1)}\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0), \tag{3.90}$$

$$k_2 = \lim_{x_1 \to a-0} \sqrt{2\pi(a - x_1)}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0), \tag{3.91}$$

$$k_4 = \lim_{x_1 \to b-0} \sqrt{2\pi(b - x_1)}D_3^{(1)}(x_1, 0). \tag{3.92}$$

Виходячи з формул (3.91) та (3.82), і враховуючи, що $\varphi^{\cdot}(a) = 0$, маємо:

$$k_2 = -\frac{1+\gamma_1}{n_{11}\sqrt{2\pi\gamma_1}}\sqrt{\frac{d-c}{(a-c)(d-a)}}\left\{\sin\varphi(d)N_1 + \cos\varphi(d)n_{11}P_1\right\}. \tag{3.93}$$

Помножимо ліву та праву частину співвідношень (3.90), (3.92) на $\sqrt{2\pi(b - x_1)}$, перейдемо до границі при $x_1 \to b - 0$ та врахуємо, що $\varphi_0(b) = 0$. В результаті одержуємо:

$$n_{13}k_1 + n_{14}k_4 = -\sqrt{\frac{2}{\pi(b-c)}}\frac{A_1}{Y(d)(d-b)}, \tag{3.94}$$

$$n_{43}k_1 + n_{44}k_4 = -\sqrt{\frac{2(d-c)}{\pi(b-c)(d-b)}}N_2. \tag{3.95}$$

Далі розглядаючи співвідношення (3.94), (3.95) як систему лінійних алгебраїчних рівнянь та розв'язуючи її, отримаємо:

$$k_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi(b-c)}}\left[\frac{n_{14}}{n_{13}n_{44}-n_{14}n_{43}}\sqrt{\frac{d-c}{d-b}}\left(\frac{n_{13}}{n_{43}}N_2 + r_2(d)\right) - \frac{1}{n_{43}}N_2\right], \quad (3.96)$$

$$k_4 = \frac{n_{43}}{n_{14}n_{43}-n_{13}n_{44}}\sqrt{\frac{2}{\pi(b-c)}}\left(\frac{n_{13}}{n_{43}}\sqrt{\frac{d-c}{d-b}}N_2 - \frac{A_1}{\sqrt{(d-a)(d-b)}}\right). \quad (3.97)$$

Отриманий вище розв'язок є математично справедливим для довільного положення точки b. Однак він буде фізично коректним, якщо будуть виконані слідуючи додаткові умови:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0) \le 0 \text{ для } x_1 \in L_2, \ \left[u_3(x_1,0)\right] \ge 0 \text{ для } x_1 \ge b. \quad (3.98)$$

В роботі [88] при розгляданні внутрішньої електроізольованої міжфазної тріщини показано, що вказані умови будуть виконані, якщо $b \in [b_1, b_2]$, де положення точки b_1 визначається з рівняння:

$$\lim_{x_1 \to b} \sqrt{x_1 - b}\, u_3'(x_1) = 0, \quad (3.99)$$

а положення точки b_2 з рівняння:

$$k_1 = 0. \quad (3.100)$$

Підставляючи формулу (3.78) в умову (3.99), та беручи до уваги, що $\varphi(b) = 0$, отримаємо, що рівняння (3.99) може бути записано у вигляді:

$$A\sin\varphi_1(d)+B\cos\varphi_1(d)=C, \tag{3.101}$$

де $A=\frac{1+\chi_1}{2}n_{11}P_1$, $B=-\frac{1+\chi_1}{2}N_1$, $C=-\frac{m_{14}}{m_{44}}N_2$,

а $\varphi_1(d)$ може бути представлено таким чином:

$$\varphi_1(d)=2\varepsilon ln\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{(1+\lambda_1)}\sqrt{1-\chi}+\sqrt{1-(1+\lambda_1)\chi}}, \tag{3.102}$$

де $\chi=\frac{a-c}{d-c}$, $\lambda_1=\frac{b_1-a}{a-c}$.

Рівняння (3.101) є рівнянням для знаходження відносного положення точки b_1, яке визначається величиною λ_1. У випадку малих λ_1, вважаючи $1+\lambda_1\approx 1$, отримаємо $\varphi_1(d)\approx\varepsilon ln\frac{\lambda_1}{4(1-\chi)}$ і рівняння (3.101) допускає наступний наближений розв'язок:

$$\lambda_1\approx\tilde{\lambda}_1=4(1-\chi)\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left[\pm\arccos\frac{2CB\pm\sqrt{D}}{2\left(A^2+B^2\right)}+2\pi k\right]\right\}, \tag{3.103}$$

де $D=(-2CB)^2-4\left(A^2+B^2\right)\left(C^2-A^2\right)$,

$n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, причому його треба вибирати так, щоб $\tilde{\lambda}_1$ являло собою найбільший корінь рівняння (3.101) з проміжку $\left(0,\lambda^*\right)$.

Далі підставляючи вираз (3.96) в рівняння (3.100), запишемо рівняння (3.100) у вигляді:

$$L\cos\varphi_2(d)+T\sin\varphi_2(d)=H, \tag{3.104}$$

де $L=\dfrac{n_{43}}{n_{13}n_{44}-n_{14}n_{43}}N_1$, $T=-\dfrac{n_{44}n_{11}}{n_{13}n_{44}-n_{14}n_{43}}P_1$, $H=\left[\dfrac{n_{44}n_{13}}{n_{13}n_{44}-n_{14}n_{43}}-1\right]n_{43}N_2$,

$$\varphi_2(d)=2\varepsilon ln\frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{(1+\lambda_2)}\sqrt{1-\chi}+\sqrt{1-(1+\lambda_2)\chi}},\ \lambda_2=\frac{b_2-a}{a-c}.$$

Рівняння (3.104) і є рівнянням для знаходження відносного положення точки b_2, яке визначається величиною λ_2. У випадку малих λ_2, вважаючи $1+\lambda_2\approx 1$, маємо $\varphi_2(d)\approx\varepsilon ln\dfrac{\lambda_2}{4(1-\chi)}$, і рівняння (3.104) допускає наближений розв'язок:

$$\lambda_2\approx\tilde{\lambda}_2=4(1-\chi)\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left[\pm\arccos\frac{2HL\pm\sqrt{D_1}}{2\left(L^2+T^2\right)}+2\pi k\right]\right\}, \tag{3.105}$$

де $D_1=(-2HL)^2-4\left(L^2+T^2\right)\left(H^2-T^2\right)$,

$n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, причому його потрібно вибирати аналогічно, як для рівняння (3.103).

У випадку електроізольованої тріщини нерівності (3.98) однозначно не визначають положення точки b. В роботі [88] при розгляданні внутрішньої електроізольованої міжфазної тріщини показано, що це положення визначається на основі ще однієї додаткової умови, яка витікає з теореми про мінімум потенціальної енергії. Використання цієї умови і проведення аналогії між внутрішньою і зовнішньою міжфазними тріщинами показують, що дійсне положення точки b співпадає з b_2.

Розглянемо тепер аналіз результатів.

Вважалося, що верхній матеріал PZT 4, а нижній – PZT 5 (характеристики матеріалів наведені в табл. 3.1), $c = -1м$, $a = 1м$, $P_2 = 1\frac{H}{м}$. Для цих матеріалів $\gamma_1 = 1.0305$, $\varepsilon = 0.0048$.

Для вказаної пари матеріалів коефіцієнти співвідношень (3.62), (3.63), які грають визначальну роль при знаходженні всіх необхідних величин мають наступні значення:

$m_{11} = 0.7965$, $m_{13} = m_{34} = -1.2311 \cdot 10^{-10}$, $m_{31} = -0.7965$, $m_{41} = 0$, $m_{44} = -5.2564 \cdot 10^{-10}$.

$n_{11} = 3.128 \cdot 10^{-11}$, $n_{13} = -3.2536 \cdot 10^{-11}$, $n_{14} = -0.0619$, $n_{31} = -3.2235 \cdot 10^{-11}$, $n_{33} = -3.353 \cdot 10^{-11}$, $n_{34} = -0.0638$, $n_{41} = 3.0667 \cdot 10^{-29}$, $n_{43} = -1.5546 \cdot 10^{-11}$, $n_{44} = -0.1263$.

На рис. 3.8 для $d = 1.5м$, $d_0 = 0$ приведені значення відносного положення точок b_1, b_2, які визначаються величинами λ_1, λ_2, відповідно, в залежності від величини P_1.

Результати для інших значень d приведені в табл. 3.6 – 3.9.

В табл. 3.6 – 3.7 приведені результати обчислення значень λ_1, отримані за допомогою рівняння (3.103), в табл. 3.8 – 3.9 даються значення λ_2, отримані за допомогою рівняння (3.105).

В табл. 3.10, 3.11, 3.12, 3.13 приведені значення КІ k_2 $\left(H/м^{3/2}\right)$ і k_4 $\left(Кл/м^{3/2}\right)$, відповідно, отримані для біматеріалу PZT 4/PZT 5 і зон контакту табл. 3.6 – 3.9 та рис. 3.8.

Аналіз отриманих результатів показує, що довжини зон контакту для вибраної пари матеріалів є, як правило, дуже малими. Суттєвий ріст спостерігається лише для досить великих значень коефіцієнта – P_1/P_2. Значення λ_1 і λ_2, а також відповідні їм коефіцієнти інтенсивності зсувного напруження і електричної індукції досить близькі між собою у всьому діа-

пазоні зміни P_1/P_2. Як і для електропроникної тріщини довжина зони контакту та величини КІ залежать від точки прикладання зосереджених сил, причому приближення цієї точки до вершини тріщини веде до зменшення λ_0 і збільшення коефіцієнтів інтенсивності зсувного напруження і електричної індукції.

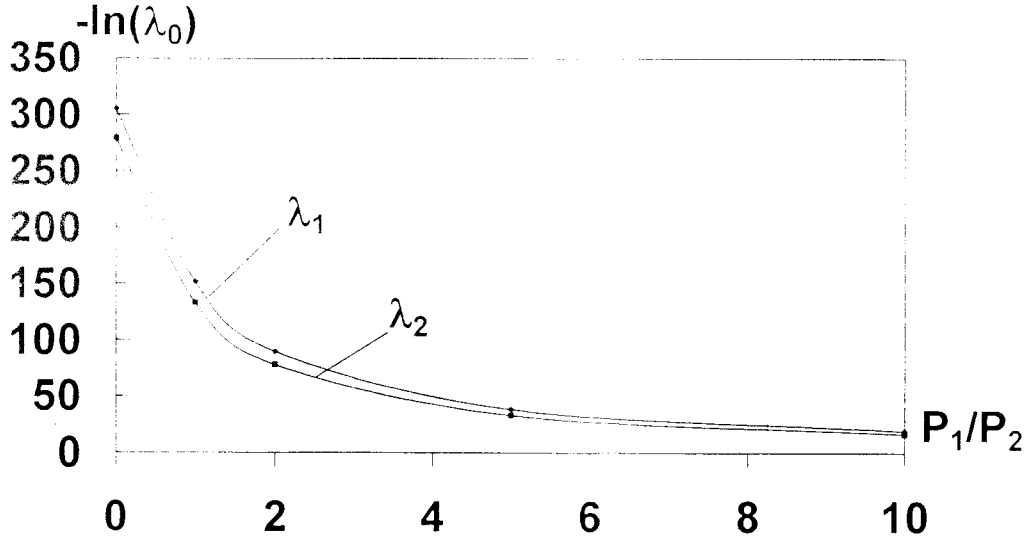

Рис. 3.8

Таблиця 3.6

Залежності λ_1 від співвідношення величин зосереджених сил та точки їх прикладання для $P_1/P_2 \le 0$ для біматеріалу PZT 4/PZT 5

$\frac{d-a}{a-c}$ \ P_1/P_2	-100	-10	-5	-2	-1	0
0.25	$8.08\cdot10^{-285}$	$1.99\cdot10^{-275}$	$3.21\cdot10^{-265}$	$9.76\cdot10^{-238}$	$1.33\cdot10^{-205}$	$2.53\cdot10^{-133}$
0.5	$1.35\cdot10^{-284}$	$3.31\cdot10^{-275}$	$5.35\cdot10^{-265}$	$1.63\cdot10^{-237}$	$2.21\cdot10^{-205}$	$4.21\cdot10^{-133}$
1	$2.02\cdot10^{-284}$	$4.97\cdot10^{-275}$	$8.02\cdot10^{-265}$	$2.44\cdot10^{-237}$	$3.32\cdot10^{-205}$	$6.31\cdot10^{-133}$
2	$2.69\cdot10^{-284}$	$6.62\cdot10^{-275}$	$1.07\cdot10^{-264}$	$3.25\cdot10^{-237}$	$5.38\cdot10^{-205}$	$8.42\cdot10^{-133}$

Таблиця 3.7

Залежності λ_1 від співвідношення величин зосереджених сил та точки їх прикладання для $P_1/P_2 > 0$ для біматеріалу PZT 4/PZT 5

$\frac{d-a}{a-c}$ \ P_1/P_2	1	2	5	10	100
0.5	$1.98\cdot10^{-66}$	$1.69\cdot10^{-39}$	$3.57\cdot10^{-17}$	$5.7\cdot10^{-9}$	$1.93\cdot10^{-1}$
1	$2.96\cdot10^{-66}$	$2.54\cdot10^{-39}$	$5.35\cdot10^{-17}$	$8.55\cdot10^{-9}$	$2.89\cdot10^{-1}$
2	$3.95\cdot10^{-66}$	$3.38\cdot10^{-39}$	$7.13\cdot10^{-17}$	$1.14\cdot10^{-8}$	$3.86\cdot10^{-1}$

Таблиця 3.8

Залежності λ_2 від співвідношення величин зосереджених сил та точки їх прикладання для $P_1/P_2 \le 0$ для біматеріалу PZT 4/PZT 5

$\frac{d-a}{a-c}$ \ P_1/P_2	-100	-10	-5	-2	-1	0
0.25	$1.06\cdot10^{-284}$	$2.9\cdot10^{-274}$	$6.3\cdot10^{-263}$	$1.57\cdot10^{-232}$	$1.99\cdot10^{-197}$	$6.77\cdot10^{-122}$
0.5	$1.76\cdot10^{-284}$	$4.83\cdot10^{-274}$	$1.05\cdot10^{-262}$	$2.62\cdot10^{-232}$	$3.31\cdot10^{-197}$	$1.13\cdot10^{-121}$
1	$2.65\cdot10^{-284}$	$7.25\cdot10^{-274}$	$1.57\cdot10^{-262}$	$3.94\cdot10^{-232}$	$4.97\cdot10^{-197}$	$1.69\cdot10^{-121}$
2	$3.53\cdot10^{-284}$	$9.66\cdot10^{-274}$	$2.1\cdot10^{-262}$	$5.25\cdot10^{-232}$	$6.63\cdot10^{-197}$	$2.26\cdot10^{-121}$

Таблиця 3.9

Залежності λ_2 від співвідношення величин зосереджених сил та точки їх прикладання для $P_1/P_2 > 0$ для біматеріалу PZT 4/PZT 5

$\frac{d-a}{a-c}$ \ P_1/P_2	1	2	5	10	100
0.5	$2.96\cdot10^{-58}$	$2.73\cdot10^{-34}$	$7\cdot10^{-15}$	$8.32\cdot10^{-8}$	$2.53\cdot10^{-1}$
1	$4.44\cdot10^{-58}$	$4.09\cdot10^{-34}$	$1.05\cdot10^{-14}$	$1.25\cdot10^{-7}$	$3.79\cdot10^{-1}$
2	$5.92\cdot10^{-58}$	$5.45\cdot10^{-34}$	$1.4\cdot10^{-14}$	$1.66\cdot10^{-7}$	$5.05\cdot10^{-1}$

Таблиця 3.10

Зміна КІН k_2 в залежності від співвідношення $P_1/P_2 < 0$ зосереджених сил та точки їх прикладання для біматеріалу PZT 4/PZT 5, що відповідають відносній довжини зони контакту λ_1

$\frac{d-a}{a-c}$ \ P_1/P_2	-100	-10	-5	-2	-1
0.25	–126.15	–12.43	–5.97	–1.75	–0.073
0.5	–97.71	–9.63	–4.62	–1.36	–0.064
1	–79.78	–7.86	–3.77	–1.11	–0.051
2	–69.09	–6.81	–3.27	–0.96	–0.041

Таблиця 3.11

Зміна КІН k_2 в залежності від співвідношення $P_1/P_2 < 0$ зосереджених сил та точки їх прикладання для біматеріалу PZT 4/PZT 5, що відповідають відносній довжини зони контакту λ_2

$\frac{d-a}{a-c}$ \ P_1/P_2	-100	-10	-5	-2	-1
0.25	–126.15	–12.47	–6.03	–1.88	–0.24
0.5	–97.72	–9.66	–4.67	–1.45	–0.18
1	–79.78	–7.88	–3.81	–1.19	–0.15
2	–69.1	–6.83	–3.3	–1.03	–0.13

Таблиця 3.12

Зміна КІ k_4 в залежності від співвідношення $P_1/P_2 < 0$ зосереджених сил та точки їх прикладання для біматеріалу PZT 4/PZT 5, що відповідають відносній довжини зони контакту λ_1

$\frac{d-a}{a-c}$ \ P_1/P_2	-100	-10	-5	-2	-1
0.25	$-4.59\cdot10^{-10}$	$-3.28\cdot10^{-10}$	$-3.08\cdot10^{-10}$	$-2.55\cdot10^{-10}$	$-1.39\cdot10^{-10}$
0.5	$-3.44\cdot10^{-10}$	$-2.54\cdot10^{-10}$	$-2.39\cdot10^{-10}$	$-1.97\cdot10^{-10}$	$-1.08\cdot10^{-10}$
1	$-2.7\cdot10^{-10}$	$-2.08\cdot10^{-10}$	$-1.95\cdot10^{-10}$	$-1.61\cdot10^{-10}$	$-8.78\cdot10^{-11}$
2	$-2.25\cdot10^{-10}$	$-1.8\cdot10^{-10}$	$-1.69\cdot10^{-10}$	$-1.4\cdot10^{-10}$	$-7.6\cdot10^{-11}$

Таблиця 3.13

Зміна КІ k_4 в залежності від співвідношення $P_1/P_2 < 0$ зосереджених сил та точки їх прикладання для біматеріалу PZT 4/PZT 5, що відповідають відносній довжини зони контакту λ_2

$\frac{d-a}{a-c}$ \ P_1/P_2	-100	-10	-5	-2	-1
0.25	$-4.17\cdot10^{-10}$	$-2.84\cdot10^{-10}$	$-2.66\cdot10^{-10}$	$-2.26\cdot10^{-10}$	$-1.35\cdot10^{-10}$
0.5	$-3.1\cdot10^{-10}$	$-2.2\cdot10^{-10}$	$-2.06\cdot10^{-10}$	$-1.75\cdot10^{-10}$	$-1.05\cdot10^{-10}$
1	$-2.4\cdot10^{-10}$	$-1.8\cdot10^{-10}$	$-1.69\cdot10^{-10}$	$-1.43\cdot10^{-10}$	$-8.54\cdot10^{-11}$
2	$-1.98\cdot10^{-10}$	$-1.56\cdot10^{-10}$	$-1.46\cdot10^{-10}$	$-1.24\cdot10^{-10}$	$-7.39\cdot10^{-11}$